

1917.

No. 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREU, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 52. Heft 2.

DER GANZEN REIHE 257. BANDES 2. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1917.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.
(Ausgegeben am 6. März 1917.)

Inhalt.

	Seite
1. Ernst Reiche. Versuche über den Beginn der Glimmentladung in Luft	109
2. Ernst Reichenbächer. Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation	134
3. Ernst Reichenbächer. Nachtrag zu der Arbeit: „Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und der Gravitation“	174
4. R. Gans und H. Isnardi. Stadium der magnetischen und optischen Erscheinungen kolloidaler Eisenlösungen. Ein Beitrag zur Konstitution ultramikroskopischer Eisenoxydhydrateilchen	179
5. J. M. Burgers. Die adiabatischen Invarianten bedingt periodischer Systeme	195
6. Max B. Weinstein. Über die Zustandsgleichung der festen Körper	203
7. Max B. Weinstein. Das Nernstsche Theorem und die Wärmeausdehnung fester Stoffe	218

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschriften der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.

S
g
n
ü
r
d



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 52.

**1. Versuche über den Beginn der Glimmentladung
in Luft;
von Ernst Reiche.**

(Greifswalder Dissertation.)

Ziel der Arbeit.

1. Die Stromspannungskurve in Gasen geht bekanntlich nach dem Einsetzen der Stoßionisierung rasch zu einem Spannungsmaximum, hinter welchem dann das Gebiet des labilen Stromes folgt, in dem mit sinkender Spannung die Stromstärke stark ansteigt. Dieses Maximum der Spannung ist die Entladungs- oder Funkenspannung. Eine genauere Untersuchung der Stromspannungskurve in der Nähe dieses Punktes dürfte für das Verständnis der Vorgänge, die eine selbständige Entladung einleiten, von besonderer Wichtigkeit sein. Diese Untersuchung war zunächst das Ziel der von mir unternommenen Arbeit. Wie man sehen wird, ist das Ziel nicht erreicht worden, weil in der Nähe des Spannungsmaximums eigentümliche störende Erscheinungen auftreten, die meines Wissens bisher noch nicht bekannt geworden sind und auf deren Untersuchung ich demgemäß meine Aufmerksamkeit lenkte.

Das Entladungsgefäß.

2. Das Entladungsgefäß war dem von Townsend in seinen bekannten Untersuchungen über Stoßionisation und Entladung¹⁾ benutzten nachgebildet und ist in Fig. 1 dargestellt. Zur Erzeugung der ursprünglichen Ionisierung benutzte ich nicht ultraviolettes Licht, wie Townsend, sondern ein Radiumsalz, das auf der einen Elektrode gleichmäßig sehr dünn aufgetragen war. Ich stellte den Radiumüberzug der Elektrode dadurch her, daß ich sie mit einer radiumhaltigen Lösung bedeckte und das Lösungswasser verdunsten ließ.

1) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) 5. p. 389. 1903.

Eine Glasglocke von 20 cm lichter Höhe und 14,5 cm Weite saß mit ihrem abgeschliffenen Rande auf einer planen Glasplatte. Diese Glasplatte trug mittels dreier Messingklötze eine den Flaschenraum ausfüllende Ebonitplatte, auf deren Mitte die mit dem Radiumpräparat überzogene geradete Elektrode E_1 aufgekittet war. Die Zuleitung zu E_1 führte durch die Ebonit- und Glasscheibe hindurch. Vier

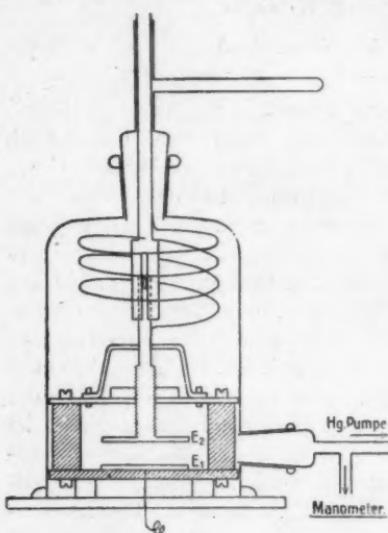


Fig. 1. Entladungsgefäß.

baren Messinghülse hatte. Diese Messinghülse war mittels eines verjüngten Messingrohres in dem drehbaren Schliff des oberen zentralen Flaschentubus eingekittet, durch den auch die Zuleitung zur oberen Elektrode lief. Um eine einwandfreie elektrische Leitung zur Elektrode E_2 zu haben, war die Kontaktstelle in dem aufgeschlitzten Messingrohr außerdem noch durch einen spiralförmig aufgewundenen, beiderseits verlötzten Draht überbrückt. Irgendwelche kleinere Funkenstrecken in den Leitungen waren danach völlig ausgeschlossen.

Drehte man den oberen Schliff mittels der seitlichen Handhabe, so drehte sich die Schraube in der festen Mutter mit, und man konnte so den Elektrodenabstand bis 35 mm

Ebonitsäulen von 4 em Höhe trugen eine etwas kleinere Messingplatte, die mit verschiebbaren Ebonitnasen gegen die Flaschenwand verstellt war und in ihrer verdickten Mitte eine Schraubenmutter enthielt, durch die eine sorgfältig gearbeitete, kräftige Schraube führte, auf deren Kopf die andere Elektrode E_2 saß. Eine weitere Versteifung sollte das Schlagen der Schraube verhindern. Eine Messingstange, die schwächere Verlängerung der Schraube, trug eine Nase, die ihre Führung in den Schlitten einer darübersteckenden verschiebbaren

variierten, ohne den Luftdruck zu ändern. Durch einen seitlichen Schliff stand die Flasche in Verbindung mit einer Gaedeschen Quecksilberpumpe und einem Manometer.

Sämtliche Kittungen waren mit weißem Siegellack ausgeführt und zur Sicherheit mit einem Piceinmantel überzogen. Um Gleitfunken am Glase zu verhindern, waren die entsprechenden Teile mit einer Schicht doppelt filtrierten Schellacks überzogen. Die Schliffe waren mit Ramsayfett gedichtet. Das ganze Gefäß stand auf mehreren Paraffinplatten, die ihrerseits auf einer geerdeten Bleiplatte lagen.

Um ein möglichst homogenes Feld im Entladungsraum zu erhalten, wurden die Messing(platten)elektroden sehr groß genommen. Ihr Durchmesser betrug 75 mm.

Stromquelle und Vorschaltwiderstand.

3. Eine zu je 100 Volt geschaltete Akkumulatorenbatterie von im ganzen 1000 Volt diente als Stromquelle. In den ersten Versuchsreihen wurde die Entladungsstromstärke mit Hilfe eines großen Widerstandes variiert. Dieser bestand aus einer größeren Reihe von U-Röhren mit schlecht leitender Flüssigkeit, die in Paraffin eingelassen waren. Man regulierte den Widerstand, indem man die Zahl der eingeschalteten Röhren änderte. Zur größeren Regulierung dienten Röhren mit Anilin, die einen sehr hohen Widerstand hatten, zur feineren Regulierung Röhren mit einer Lösung von Jodkadmium in Amylalkohol, deren Widerstand im Vergleich zu dem der Aniliröhren wesentlich geringer war.

Bei einer zweiten Versuchsreihe wurde der Vorschaltwiderstand bis auf einen kleinen, zur Sicherung nötigen Wasserwiderstand ganz weggelassen.

Spannungsmessung.

4. Einige Schwierigkeiten machte die Messung der Spannung, da sie bei einem Meßbereich von 1000 Volt möglichst bis auf 1 Volt genau sein sollte. Zur Messung wurde ein Quadrantenelektrometer benutzt, und zwar wurde die Elektrometernadel mit der oberen, nicht geerdeten Elektrode des Entladungsgefäßes verbunden, während die Quadrantenpaare durch Verbindung mit zwei Westonelementen auf einer konstanten Potentialdifferenz gehalten wurden. Als Aufhänge-

faden bewährte sich ein kurzer, völlig bruchfreier, geglühter Lamettafaden. Bei einem Skalenabstand von ca. 2 m und der Quadrantenspannung 2 Volt hatte so das Elektrometer in dem Hauptmeßbereich von 400—800 Volt eine Empfindlichkeit von 1 Volt pro Millimeter. Selbst nach stundenlanger Inanspruchnahme war die Nullpunktsverschiebung so gering, daß sie vernachlässigt werden konnte. Zur Dämpfung tauchte ein in der Verlängerung der Nadel angebrachter 3 qcm großer Kupferflügel in Petroleum. Die Messungsfehler überschritten selten $1-2\%$.

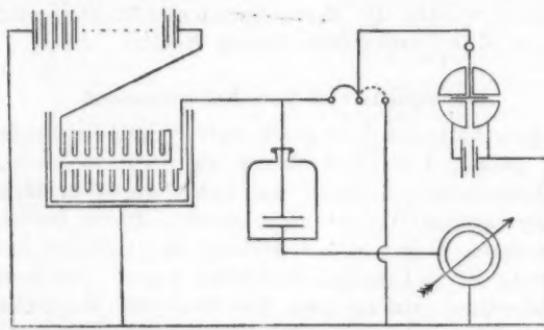


Fig. 2. Erste Versuchsanordnung.

Strommessung.

5. Die untere Elektrode wurde durch ein Drehspulen-galvanometer von Siemens & Halske hindurch mit der Erde verbunden. Die Empfindlichkeit dieses Instrumentes wurde unter Benutzung geeigneter Nebenschlüsse durch Vergleich mit einem Präzisionsmilliamperemeter bestimmt. Sie betrug bei einem Skalenabstand von ca. 2 m $3,7 \cdot 10^{-10}$ Amp. pro Millimeter und ließ sich durch geeignete Nebenschlüsse für beliebige Meßbereiche in bekannter Weise ändern. Die Schaltung bei der ersten Versuchsreihe ist durch Fig. 2 dargestellt.

6. Als bei den in der zweiten Versuchsreihe geschilderten Messungen die Empfindlichkeit des Drehspulgalvanometers vielfach noch nicht genügte, mußte der unter 10^{-10} liegende Strom elektrostatisch gemessen werden. Um beide Meßmethoden

nach Bedarf benutzen zu können, wurde folgende Einrichtung getroffen (Fig. 3): Die vom Entladungsgefäß kommende, gut isolierte und außerdem elektrostatisch geschützte Leitung führte zu einem Messingstab, an dem drei federnde Stahllamellen befestigt waren. Der Messingstab war in einen Paraffinklotz eingelassen, der in einem geerdeten Blechkasten eingeschlossen war. Die mit Platinblech belegten Enden der drei Federn schlugen auf drei Platinspitzen auf, die in dem Paraffinklotz steckten. Von diesen Platinspitzen war die erste

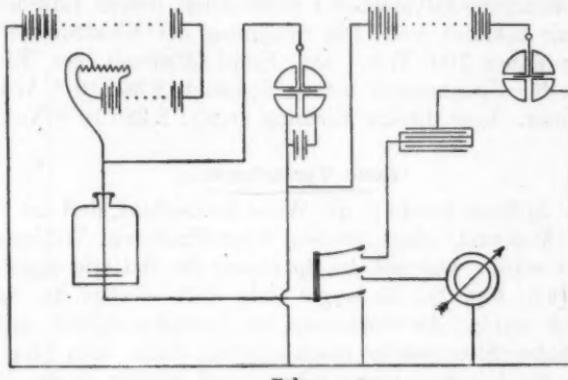


Fig. 3. Zweite Versuchsanordnung.

mit der Erde, die zweite mit dem Drehspuleninstrument und die dritte mit einem Kondensator und mit dem einen Quadrantenpaar eines gut isolierten empfindlichen Quadrantenektrometers verbunden. Von den Federn gingen Kokonfäden durch kleine Löcher im Kastendeckel zu Siegellackstangen, die mit Paraffin überzogen waren, und von diesen Seidenschnüre zum Arbeitsplatz. Auf diese Weise wurden Kapazitätsstöße infolge der Influenzladungen durch den immer etwas elektrisch geladenen Siegellack bei Aufhebung der Erdung vermieden.

Der an dem dritten Federunterbrecher angelegte Stöpselkondensator von Siemens & Halske befand sich auf Paraffinplatten in einem geerdeten Blechkasten. Durch Heizen mittels einer Kohlenfadenlampe und mit konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorpentoxyd wurde für gute Isolation der

auf einer Ebonitplatte aufgeschraubten Messingklötzte des Stöpselkondensators gesorgt. Wurde nun der Strom 10 Sek. in den Kondensator geleitet, wenn eine Kapazität von 0,01 Mikrofarad gestöpselt war, so entsprach ein Millimeter Ausschlag am Elektrometer einem Strom von $2,86 \cdot 10^{-12}$ Amp. Man erhielt diesen Wert als den vierzigsten Teil der Stromstärke, die man beim gleichen Ausschlag hatte, wenn am Kondensator 0,4 Mikrofarad gestöpselt waren. Bei dieser Kapazität 0,4 Mikrofarad konnte man die Meßanordnung direkt mit dem Drehspulengalvanometer vergleichen, dessen Empfindlichkeit mir bekannt war. Die Spannung der Elektrometernadel betrug dabei 100 Volt. Die Empfindlichkeit des Elektrometers für Spannungen betrug demnach $2,86 \cdot 10^{-3}$ Volt pro Millimeter. Eine direkte Eichung ergab: $2,88 \cdot 10^{-3}$ Volt.

Erste Versuchsreihe.

7. Anfangs wurde in der Weise beobachtet, daß der Strom durch Änderung eines großen vorgeschalteten Widerstandes variiert wurde, während die Spannung der Batterie ungeändert blieb (vgl. Fig. 2). Es zeigte sich, daß, solange die Ströme schwach waren, die Spannung am Entladungsgefäß mit zunehmender Stromstärke rasch anstieg; dann kam stets eine Stelle, wo die Stromkurve sehr schnell umbog, in der Weise, daß sich von da an die Entladungsspannung auch bei sehr großen Änderungen des Stromes nur wenig änderte. In der Hoffnung, auf diese Weise wirklich den gesuchten Teil der Stromspannungskurve in der Nähe des Spannungsmaximums zu erhalten, nahm ich eine ganze Reihe von Kurven unter den verschiedensten Bedingungen auf. Es sei hier als Beispiel eine der so erhaltenen Zahlenreihen mitgeteilt:

Volt	465,6	470,8	478,4	478,6	478,8	479,3	481,2
10^{-8} Amp.	0,037	0,111	10,7	14,1	21,5	30,3	30,3
Volt	478,6	476,0	474,7	472,1	460,4	445	
10^{-8} Amp.	33,3	37,7	44,2	50,7	75,1	163,0	

Die Zahlenreihe ist durch die nebenstehende Kurve dargestellt (Fig. 4).

Wie man sofort sieht, ist der Verlauf der Kurve ganz anders als man erwarten sollte. Sie zerfällt deutlich in zwei

Teile, die im Punkte X der Kurve zusammenhängen. Im ersten Teile steigt mit wachsender Stromstärke die Spannung stetig an, wenn auch zuletzt nur noch ziemlich langsam. Ein Maximum, bei welchem

$$\frac{dV}{dJ} = 0$$

wäre, wird jedenfalls nicht erreicht. Am Endpunkte X dieses ersten Teiles waren die Messungen mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. So brach die Kurve nicht immer an

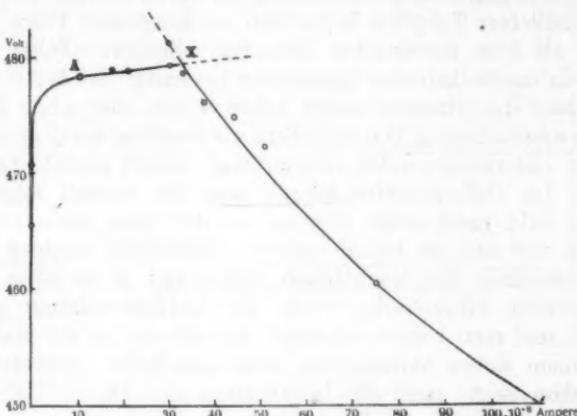


Fig. 4. Druck 4 mm, Plattenabstand 5 mm.

genau derselben Stelle ab; bei wiederholten Beobachtungen rückte der Punkt X manchmal weiter vor, bisweilen wieder weiter zurück. Außerdem war die Spannung in der Nähe von X nicht ganz eindeutig zu bestimmen, manchmal verlief die Kurve bis X ganz platt, bisweilen aber erfolgte kurz vor dem Abbrechen der Kurve ein kurzer, steiler Anstieg der Spannung, wie in dem von mir gebrachten Beispiel (Fig. 4).

Hinter dem Kniepunkt X verlief die Kurve stets so, daß die Spannung mit wachsender Stromstärke abnahm, und zwar so, daß die Abnahme zuerst ziemlich rasch, später immer langsamer erfolgte. Der zweite Teil der Stromkurve ist also bei ständig negativem dV/dJ konkav gekrümmt.

8. Bei Beobachtung des Entladungsgefäßes während der Aufnahme der oben geschilderten gesamten Kurve sah man

folgendes: An einem ziemlich scharf definierten Punkte *A* (Fig. 4), bald nach dem Umbiegen der Kurve sah man ver einzelte, schnell verlöschende Lichtblitze im Entladungsgefäß, die aber nur nach mehreren Minuten im völlig verdunkelten Zimmer eben noch wahrnehmbar waren. Jeder Lichtblitz war von einer Schwankung des Galvanometer- und des Elektrometerausschlages begleitet; er stellte einen kurzen starken Stromstoß dar. Mit wachsendem Strom wurden diese Stöße immer häufiger, so daß man schließlich ein flackerndes Licht zwischen beiden Platten sah. In einem nebengeschalteten empfindlichen Telephon hörte man bei langsamer Folge jeden Stoß als leise knackenden Ton, bei schnellerer Folge ergab sich ein unmusikalisches knarrendes Geräusch, das bei weiterer Zunahme des Stromes immer höher wurde, aber ohne jemals einen musikalischen Ton zu geben, wie man ihn bei dem eigentlichen „intermittierenden Glimmstrom“ immer charakteristisch hört. Im Galvanometer konnte man die schnell folgenden Stöße bald nicht mehr trennen, so daß man einen ruhigen Strom vor sich zu haben meinte. Schließlich erschien auch das Aussehen der leuchtenden Entladung ganz ruhig. Bei wachsender Stromstärke wurde die Lichterscheinung immer heller, und man konnte erkennen, wie sie sich an der Kathode zu einem Saum verdichtete. Aber ein helles Geräusch im Telephon zeigte noch die Intermittenz an. In der Nähe des Punktes *X* wurde die Erscheinung wieder unruhig; man sah heller leuchtende Partien, die unruhig hin und her hüpfen.

Auf der zweiten Kurve, also hinter *X*, hatte man regelrecht intermittierende Glimmentladungen. Im Anfang der Kurve waren die Intermittenzen einzeln gut sichtbar. Man sah, wie sich zuerst die ganze Anode mit einem verhältnismäßig schwachen, allmählich heller werdenden Glimmlichtsaum überzog, der dann plötzlich verschwand, indem dafür an einem begrenzten Fleck der Kathode ein sehr helles Kathodenglimmlicht auftrat, das diffus in das Anodenlicht überging. Diese Lichterscheinung erlosch sehr schnell, und es trat dann sofort wieder der schwache Anodenlichtsaum auf, wurde heller und das Spiel begann von neuem.

Mit wachsender Stromstärke wurden die Lichtblitze häufiger, bis sie sich so überlagerten, daß man scheinbar eine ruhige Erscheinung hatte, die immer mehr an Helligkeit zu

nahm. Das negative Glimmlicht blieb auf einen kleinen Fleck zusammengezogen. Das Anodenlicht war nur als diffuser Schein entwickelt.

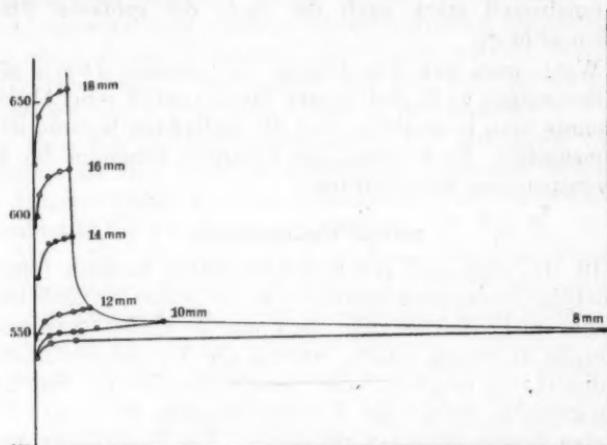


Fig. 5. Druck 2 mm, Abstand 8—18 mm.

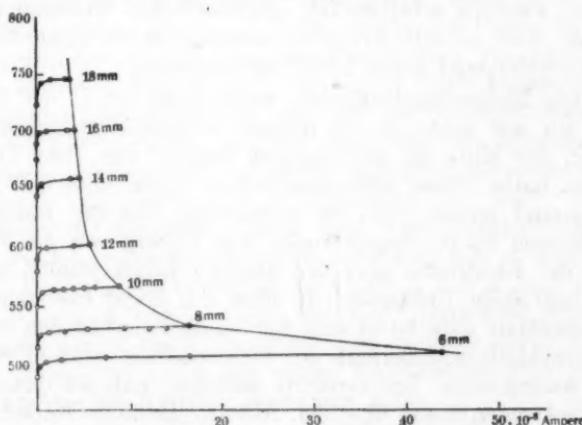


Fig. 6. Druck 3 mm, Abstand 6—18 mm.

9. In den Figg. 5 und 6 sind zwei Reihen von Spannungskurven dargestellt, die bei konstantem Druck und verändertem Plattenabstand gewonnen wurden. Der Druck

betrug 2 bzw. 3 mm Quecksilber. Es ist stets nur die erste Kurve bis zum Knickpunkt *X* aufgenommen. Durch diese Knickpunkte läßt sich eine Kurve legen, die bei abnehmendem Plattenabstand stark nach der Seite der größeren Stromstärken abbiegt.

Wenn man mit den Platten bei kleinem Druck näher zusammenging, z. B. bei 2 mm Druck auf 4 mm Abstand, so konnte man beobachten, daß die Entladung begann, außen herumzugehen. Es ist dann das bekannte Minimum der Entladungsspannung überschritten.

Zweite Versuchsreihe.

10. Da man nach der bisher benutzten Methode offenbar die richtige Stromspannungskurve in der Nähe des Entladungsbeginnes nicht bekam, die doch ein wirkliches Spannungsmaximum aufweisen müßte, wurden die Versuchsbedingungen modifiziert, um möglicherweise Aufschlüsse über die Störungen zu bekommen, welche das Zustandekommen der von mir erwarteten Erscheinungen verhinderten. Die Änderungen waren zweierlei Art. Erstens verkleinerte ich die Elektrodenoberfläche, zweitens arbeitete ich möglichst ohne Vorschaltwiderstand. Nur sicherte ich mich meistens durch einen kleinen Wasserwiderstand gegen Lichtbogenentladung.

Die Elektrodenoberflächen verkleinerte ich in der Weise, daß ich auf beide je ein dünnes Glimmerblättchen klebte, das in der Mitte ein kreisförmiges Fenster von 1 cm Durchmesser hatte. Diese Glimmerscheiben ragten über den Elektrodenrand hinaus. Um zu verhindern, daß die Entladung bei kleinen Elektrodenabständen den Umweg von der Rückseite der Elektroden über den äußeren Raum wählte, wurde auch auf diese Rückseiten ein über den Rand überstehendes Glimmerblatt aufgekittet und der Raum zwischen den beiden Glimmerblättern außerhalb der Elektrode mit weißem Siegel-lack ausgegossen. Ich erreichte dadurch, daß ich jedenfalls die Elektroden etwas über den Abstand kleinster Entladungsspannung einander nähern konnte, ohne daß die Entladung gleich nach außen umsprang.

Als zweite Änderung der Versuchsanordnung ließ ich, wie schon oben erwähnt, den großen Flüssigkeitswiderstand vor dem Entladungsgefäß weg. Um die Batteriespannung variieren

zu können, wurden neben dem Arbeitsplatze noch 50 Akkumulatoren aufgestellt, mit deren Hilfe die Spannung von 2 zu 2 Volt verändert werden konnte. Gelegentlich wurden noch ein oder zwei größere Akkumulatoren dazu geschaltet, die durch einen Widerstand geschlossen waren. Durch Abtasten an diesem Widerstände ließ sich die Spannung auch innerhalb von 2 Volt noch kontinuierlich ändern.

Um die Stromspannungskurve bei geringeren Stromstärken als den bisher ausschließlich benutzten beobachten zu können, wurde die oben geschilderte elektrometrische Meßanordnung für den Strom eingerichtet (vgl. Fig. 8).

11. Die Beobachtungen ergaben folgendes Bild: Die Stromspannungskurve steigt zunächst sehr steil an und macht dann plötzlich ein Knie. Im allgemeinen kommt hinter diesem Knie bald ein Punkt, wo der regelmäßige Strom durch einzelne, in ziemlich regellosen Intervallen folgende Stöße unterbrochen wird. Im vollkommen verdunkelten Zimmer kann man die Stöße als schwachen Lichtschimmer mit den Stäbchen wahrnehmen, wenn das Auge 10 Minuten ausgeruht hat.

Es zeigte sich ein großer Unterschied, wenn die mit dem Radiumpräparat überzogene und stets geerdete Platte, die ich im folgenden kurz als „Radiumplatte“ bezeichnen will, Anode war, und wenn sie Kathode war. Im ersten Falle konnte ich das Zunehmen der Stromstöße oft über ein Intervall von mehr als 50 Volt verfolgen, ehe die eigentliche mit Rückgang der Spannung verbundene Entladung einsetzte. Im zweiten Falle dagegen kam die eigentliche Entladung viel eher. Bei der Besprechung der ersten Reihe von Versuchen habe ich den Punkt, bei welchem die Stöße einsetzen, mit *A* bezeichnet, den, bei welchem die Entladung einsetzt, mit *X* (vgl. p. 115). In der ersten Versuchsreihe war der Unterschied der Spannungen von *A* bis *X* im allgemeinen ziemlich klein. Es liegt das daran, daß ich in der ersten Versuchsreihe stets die Radiumplatte als Kathode genommen hatte.

Wenn die Stöße noch sehr selten auftreten, kann man ihr Zustandekommen im Stromelektrometer deutlich verfolgen. Nachdem man während mehrerer Minuten eine konstante Stromstärke gehabt hat, bemerkt man gelegentlich ein zuerst sehr langsames Anschwellen des Stromes, das im Laufe von 10—20 Sekunden mehr und mehr zunimmt und schließlich nach

etwa einer halben Minute zu dem plötzlich einsetzenden und momentan wieder aufhörenden Stoß führt. Kurz nach dem Stoß hat man in den ersten Sekunden — wohl infolge der reichlich übrig gebliebenen Ionen — noch einen etwas stärkeren Strom, aber es stellt sich sehr schnell wieder der normale Wert her, meistens sogar ein etwas unternormaler Wert, und man hat dann wieder während mehrerer Minuten konstante Stromstärken, bis man wieder ein Anschwellen und gleich darauf den Stoß beobachtet. Man kann, solange die Stöße sehr langsam folgen, unbedenklich die Spannung ohne jeden Vorschalt-

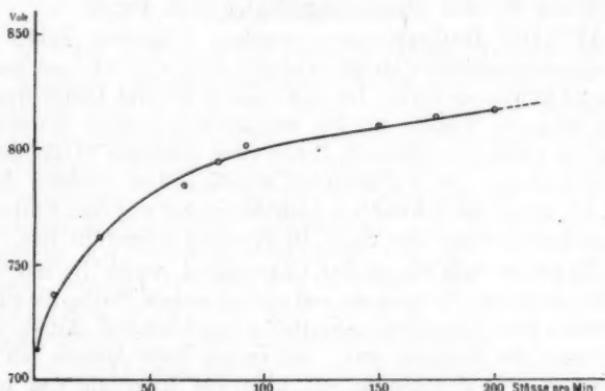


Fig. 7. Zahl der Stöße in ihrer Abhängigkeit von der Spannung.
Abstand 8,1 mm, Druck 4,9 mm, Radiumplatte Anode.

widerstand anlegen. Man sieht dann im Spannungselektrometer während eines Stoßes keine Spur einer Spannungsschwankung, wie man sie bei großem vorgeschalteten Widerstand immer sieht. Die durch einen Stoß überführte Elektrizitätsmenge ist so klein, daß der Spiegel des Strommeßelektrometers erst nach einer größeren Zahl von Stößen über die Skala hinausgeht.

Ein kleiner Plattenkondensator von 0,0009 Mikrofarad, den ich neben die Entladungsrohre schaltete, hatte nur geringen Einfluß auf die Erscheinung. Die Zahl der Stöße wurde dadurch nicht verändert, nur wurden sie gewöhnlich intensiver.

Bei niedrigen Drucken waren die Stöße schwächer; gelegentlich sah es so aus, als ob nur der Strom stark anschwoll,

ohne daß ein eigentlicher Stoß kam, und daß er gleich darauf seinen normalen Wert wieder annahm.

Während die Stromstärke in dem Gebiet der Kurve vor dem Eintreten der Stöße und auch noch in dem Gebiet der sehr seltenen Stöße mit wachsender Spannung stark zunimmt (vgl. hierzu die Kurven der Fig. 8), wird dies anders, sobald die Stöße häufiger kommen als etwa einmal in der Minute. Mißt man hier den Strom zwischen den Stößen, so findet man, daß er mit wechselnder Spannung so gut wie konstant bleibt; die Zunahme der Spannung hat nur den Erfolg, daß die Zahl der Stöße sehr schnell zunimmt. Mißt man den durchschnittlichen Wert der Stromstärke, die Stöße mitinbegriffen, dann nimmt natürlich die Stromstärke beträchtlich zu. Die Kurven der Figg. 4, 5, und 6 stellen die so definierten durchschnittlichen Stromstärken dar, die sich bei einer raschen Aufeinanderfolge der Stöße ergeben. Der kontinuierliche Strom aber, der jedesmal dem Einsetzen eines Stoßes vorhergeht, scheint bei gegebenem Druck und Elektrodenabstand schließlich einen größten Wert nicht zu überschreiten.

In welcher Weise die durchschnittliche Zahl der Stöße pro Minute mit der Spannung steigt, ist in Fig. 7 dargestellt. Ich habe bis zu fünf in der Sekunde gezählt. Bei weiterer Spannungssteigerung wurde die Zählung unsicher. Wenn die Stöße sehr schnell aufeinander folgten, so beobachtete ich ein Flackern, das durch intensivere Stöße hervorgerufen wurde, die bei schneller Stoßfolge zu den normalen Stößen hinzukamen. Man hatte schließlich den Eindruck, als ob sich einem kontinuierlich vorhandenen schwachen Lichtschimmer einzelne helle Lichtblitze überlagerten. Diese hellen Lichtblitze hätte man wohl zählen können, aber nicht die vielen, die den scheinbar kontinuierlichen Untergrund für sie bildeten. Eine eigentliche Entladung trat bei dem durch Fig. 7 dargestellten Versuch erst bei ca. 880 Volt ein, Druck = 4,9 mm Hg, Plattenabstand = 8 mm, Radiumplatte Anode.

Wenn man in die Nähe der Spannung kommt, bei welcher die regelrechte, von Spannungssturz begleitete Entladung einsetzt, so werden die sehr intensiven Stöße immer häufiger; man kann dann die Lichterscheinung schon ohne besondere Anstrengung leicht beobachten und sieht, daß sie mehr und mehr das Aussehen der richtigen Glimmentladung annimmt,

mit Kathodenglimmlicht, äußerem Dunkelraum und Anodenlichtsaum. Manchmal beginnt bei höheren Drucken bei den höchsten Spannungen in der über die ganze Elektrodenfläche ausgebreiteten Lichterscheinung auch schon ein engerer, besonders intensiver Stromfaden gelegentlich hervorzutreten. Aber erst nach Erreichung der mit dauerndem Spannungssturz verbundenen Glimmentladung stellt sich ein feststehendes, sehr hell leuchtendes schmales Stromband her.

12. Ich komme nun zur Besprechung der Einzelheiten. In Fig. 8 ist eine einzelne Beobachtungsreihe dargestellt.

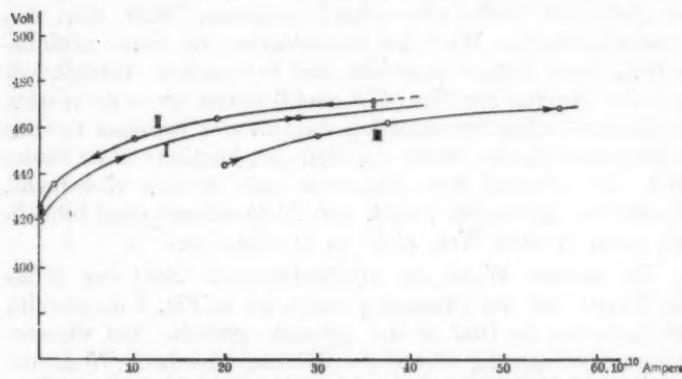


Fig. 8. Druck 1,05 mm, Abstand 4,84 mm, Radiumplatte Anode.

Die Radiumplatte war Anode, der Druck 1,05 mm Hg, der Abstand 4,84 mm. Der Gang des Versuches war folgender: Durch allmähliche Steigerung der Spannung erhielt man Kurve I. Von dem letzten Punkt derselben, bei 464 Volt, wurde plötzlich auf 483 Volt übergegangen. Es zeigten sich schon sehr viele Stöße und eine deutliche Lichterscheinung im Gefäß. Ich steigerte die Spannung weiter bis 517 Volt und konnte schon die Schichten der Glimmentladung deutlich sehen, obwohl immer noch kein Spannungssturz eintrat. Ich ließ einige Zeit diese starken Glimmstromstöße hindurchgehen und ging dann mit der Spannung auf etwas über 470 Volt zurück. Hier waren die Stöße so selten, daß ich sie zählen konnte, z. B. 473 Volt: in 1 Minute 6 Stöße, bei 471 Volt: nur ganz vereinzelte Stöße, minutenlang nichts. Von hier aus nahm ich nun rückwärts gehend die Stromspannungskurve

auf und bekam jetzt die Kurve II, die in allen ihren Punkten über I liegt. Darauf wurde die Spannung umgekehrt (Radiumplatte Kathode) und der Strom längere Zeit in der neuen Richtung hindurchgeschickt. Zum Schluß wurde dann nochmals in der ersten Richtung mit steigender Spannung beobachtet. Es ergab sich jetzt die Kurve III, die in allen ihren Punkten weit unter I liegt. Über 470 Volt begannen auch jetzt wieder die Stöße, z. B. wurden bei 474 Volt zwei Stöße in der Minute gezählt.

Sehr merkwürdig waren die Resultate, die man bei diesem Versuch erhielt, als die Radiumplatte Kathode war. Man konnte hier mit der Spannung bis auf 570 Volt gehen, ohne daß das Knie der Stromkurve erreicht wurde; die Stromstärke blieb immer unter $0,1 \cdot 10^{-10}$ Amp. Legte man 10 Volt mehr an, so daß die Batteriespannung 580 Volt betrug, so bekam man schon regelrechte Glimmentladung. Ging man jetzt mit der Spannung zurück, so wurde die Glimmentladung bis zu 568 Volt heruntergezogen. Bei 564 Volt hörte die Entladung auf, und man hatte wieder einen ganz schwachen Strom. Dieser schwache Strom bewirkte dann, wenn er auch nur kurze Zeit hindurchgegangen war, eine Steigerung des Entladungspotentials. Ich konnte nachher wieder bis 582 Volt hinaufgehen, ohne Entladung zu erhalten. Erst bei 584 Volt Batteriespannung setzte sie wieder ein und ließ sich dann wiederum nach 568 Volt herunterziehen.

Der schwache Strom, den man bei noch niedrigerer Spannung erhält, zeigt unmittelbar nach dem Durchgehen der Glimmentladung einen verhältnismäßig hohen Wert, geht im Laufe der ersten Minute gleich ganz beträchtlich herunter und fällt auch in den folgenden Minuten noch weiter. Man kann dieses Abnehmen lange Zeit hindurch verfolgen; die Stromstärke ist schließlich nur noch ein sehr kleiner Bruchteil der anfänglichen. Auf eine Aufnahme der Stromspannungskurve wurde unter diesen Umständen zunächst verzichtet. Die Erscheinungen wurden eingehender bei 2,2 mm Druck studiert (Fig. 9), wieder mit der Radiumplatte als Kathode, bei demselben Elektrodenabstand 4,84 mm. Gang des Versuches: Bei steigender Spannung ergab sich zuerst Stromkurve I, die bis 505 Volt und $98 \cdot 10^{-10}$ Amp. ging. Wurden zwei Akkumulatoren zugeschaltet (Batteriespannung 509 Volt)

so trat die regelrechte, von Spannungssturz begleitete Entladung ein, die sich dann auf 504 Volt herunterziehen ließ. Bei 502 Volt erlosch sie, und wenn der Strom hier einige Zeit übergegangen war, so setzte die Entladung erst bei der Batteriespannung 512 Volt wieder ein. Sie ließ sich dann wieder auf 502 Volt herunterziehen und so fort. — Es ist wichtig, hierbei zu bemerken, daß die Zeit bei diesen Hysteresiserscheinungen eine sehr geringe Rolle spielte. Man konnte, wenn die Glimmentladung hindurchgegangen war, beliebig lange (bis zu einer Viertelstunde) mit dem Anlegen der niedrigeren Span-

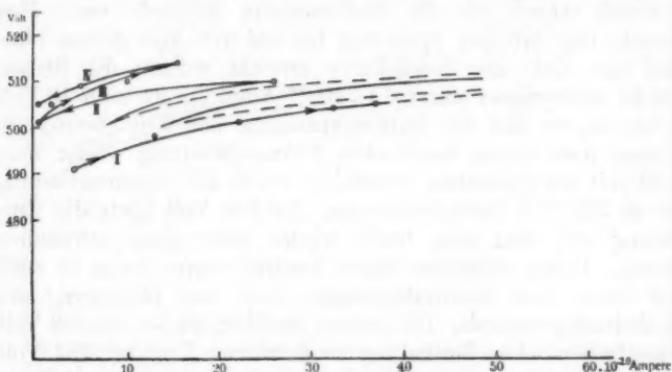


Fig. 9. Druck 2,2 mm, Abstand 4,84 mm, Radiumplatte Kathode.

nung warten; die Entladung ließ sich noch immer ebenso weit herunterziehen. Ebenso genügte dann ein ganz kurz dauernder Strom ohne Entladung, um sofort wieder die Entladungsspannung um etwa 10 Volt in die Höhe zu treiben. — Nachdem ich auf diese Weise einige Male hin und her gegangen war, bekam ich nach dem Durchleiten von schwachem Strom schon bei 510 Volt keine Entladung mehr. Ich nahm, von hier aus rückwärts gehend, die Stromkurve auf (Ast II) bis 501 Volt. Ging ich darauf mit der Spannung wieder in die Höhe (Ast III), so konnte ich sogar bis 514 Volt hinaufgehen, ohne eine Entladung zu erhalten. Von 514 Volt ging ich dann noch auf 505 Volt zurück (Ast IV). Vergleicht man die Punkte gleicher Spannung auf den Ästen I, II, III und IV, von denen die letzten drei rasch hintereinander aufgenommen sind (während ca. 10 Minuten), so sieht man deutlich, wie

der Strom sich selber zurückarbeitet, z. B. bei 501 Volt von $22 \cdot 10^{-10}$ auf $0,5 \cdot 10^{-10}$ Amp. (Ast I und II); oder bei 510 Volt

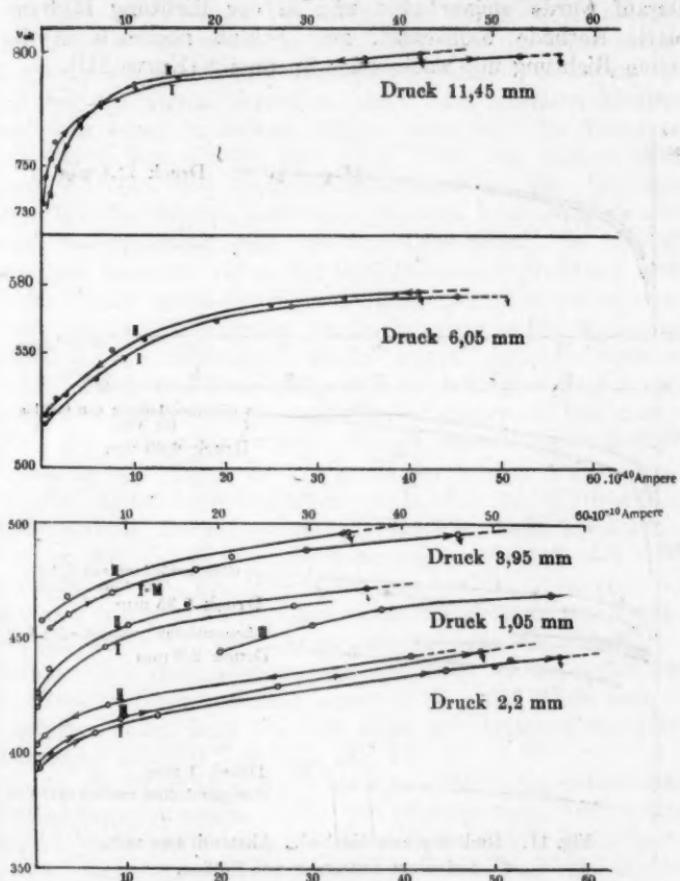


Fig. 10. Radiumplatte Anode, Abstand 4,84 mm.
↗ bedeutet Beginn der Stöße.

von $26 \cdot 10^{-10}$ Amp. auf $5 \cdot 10^{-10}$ Amp. (Ast II und IV); er sinkt also im Laufe der Zeit auf wenige Prozent seines früheren Wertes.

In den Figg. 10 und 11 sind die Resultate einer Reihe von Versuchen zusammengestellt. Bei den niedrigeren Drucken wurde zuerst in der Richtung Radiumplatte Anode mit

wachsender Spannung (Kurve I), und dann nach der Entladung mit abnehmender Spannung (Kurve II) beobachtet. Darauf wurde umgeschaltet und in der Richtung Radiumplatte Kathode beobachtet, zum Schluß nochmals in der ersten Richtung mit wachsender Spannung (Kurve III).

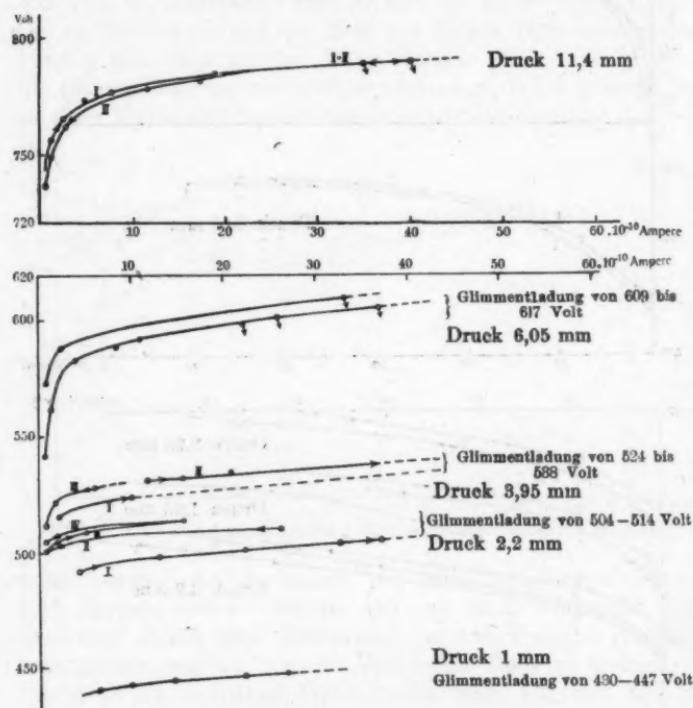


Fig. 11. Radiumplatte Kathode, Abstand 4,84 mm.

\nearrow bedeutet: Einsetzen von Stößen.

Bei den hohen Drucken (6 und 11 mm Hg) wurden die Unterschiede der beiden Richtungen geringer. Es zeigten sich jetzt auch in der Richtung Radiumplatte Kathode die typischen Stöße, die man bei niedrigen Drucken nur in der Richtung Radiumplatte Anode bekommen hatte, und die Entladung mit Spannungssturz setzte erst bei einer viel höheren Batteriespannung ein als diese Stöße. Bei diesen höheren

Drucken wurde in beiden Richtungen nur je eine Kurve aufwärts (I) und je eine abwärts (II) aufgenommen.

Nach allen diesen Versuchen ging ich noch einmal auf den Druck 1 mm zurück, um auch hierfür eine Stromspannungskurve in der Richtung Radiumplatte Kathode zu haben, die ich bei den ersten Versuchen nicht hatte erhalten können, weil hier schon Entladung eintrat, wenn man die Spannung nur um 2 Volt erhöhte über einen Wert, bei welchem man noch vor dem Knie der Stromspannungskurve war. Um also den Teil der Kurve nach dem Knie zu bekommen, mußte man die Spannung langsamer ansteigen lassen. Es geschah dies mit Hilfe der auf p. 119 beschriebenen Vorrichtung. Ein Akkumulator wurde durch einen Stöpselrheostaten geschlossen, und von dem Rheostaten wurde die gewünschte Spannung abgenommen. Außerdem wurde zuerst mehrere Stunden Strom durch das Entladungsgefäß hindurchgeleitet, bis sich endlich zu jeder Spannung auch immer nahezu ein bestimmter Wert der Stromstärke ergab. Die auf diese Weise schließlich erhaltene Stromkurve ist in Fig. 11 dargestellt. Diese Kurve ist den anderen Stromkurven (z. B. Fig. 11, 2,2 mm Hg Radiumplatte Kathode) durchaus ähnlich. Sehr bemerkenswert ist aber, daß sie in einem Spannungsbereich (440—450 Volt) verläuft, der ca. 130 Volt tiefer liegt als die Spannung, bei der man früher unter ganz denselben Bedingungen nur Stromstärken unter $0,1 \cdot 10^{-10}$ Amp. erhielt. Auch die diesmal erhaltene Entladungsspannung von 447 Volt, bei der sofort die regelrechte Glimmentladung einsetzte, ohne daß Stöße vorhergegangen wären, liegt 133 Volt unter der damals gefundenen Spannung von 580 Volt (vgl. Fig. 12).

13. In Figur 12 sind die bei diesen Versuchen gefundenen Entladungsspannungen, d. h. die Spannungen, bei denen zuerst Stöße auftreten¹⁾, in ihrer Abhängigkeit vom Luftdruck dargestellt. Bei niedrigen Drucken liegt die Kurve Radiumplatte Kathode sehr weit über der Kurve Radiumplatte Anode, während bei höheren Drucken die Kurven weniger voneinander abweichen.

Die Minimalentladungsspannung wird bei dem Elektrodenabstand 4,84 mm etwa bei 2 bzw. 2,5 mm Hg erreicht; sie

1) Nur in einigen wenigen Fällen sofort regelrechte Glimmentladung, nämlich Radiumplatte Kathode bei dem Drucken: 1; 2,2; 2,95 mm Hg.

beträgt in der einen Richtung 490 Volt, in der anderen 505 Volt. Der Wert, den der nachträgliche Versuch Radiumplatte Kathode bei 1 mm Hg ergeben hat, 447 Volt, ist durch ein Kreuz (\times) markiert. Zum Vergleich ist die von Carr¹⁾ gefundene Kurve für Luft, auf 4,84 mm Abstand nach dem Paschenschen Gesetz umgerechnet, punktiert eingetragen. Wie man sieht, verläuft die Kurve von Carr noch ziemlich tief unter der tieferen meiner beiden Kurven. Sein Minimum der Entladungsspannung ist 350 Volt.

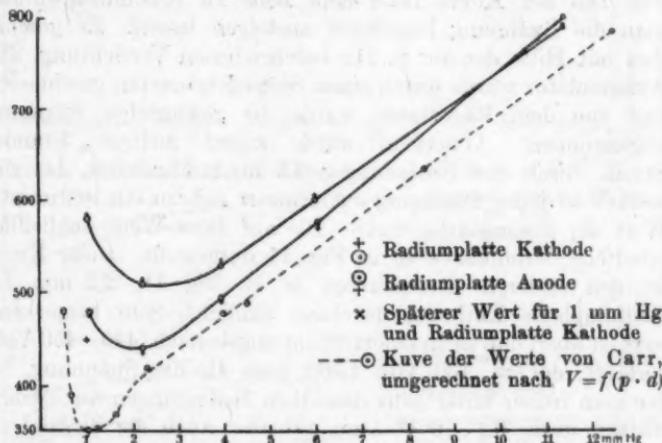


Fig. 12. Kurven der Funkenpotentiale. Elektrodenabstand 4,84 mm.

14. Nach dem Abschluß der soeben beschriebenen Versuche wurde der Apparat auseinander genommen und die Glimmerscheiben entfernt. Es zeigte sich, daß die Elektroden auf dem Fleck, der unbedeckt gewesen war, einen braunen Beschlag bekommen hatten.²⁾ Die Elektrodenoberflächen wurden abgeputzt, auf die untere wurde neues Radiumsalz hinaufgetan, und der Ausschnitt der Glimmerblättchen wurde auf einen Durchmesser von 19 mm erweitert, so daß nun

1) J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases. 1. Aufl. p. 412ff.

2) Vgl. E. Gehrcke u. R. Seeliger, Verh. d. D. Physik. Ges. 14. p. 1024. 1912.

also die unbedeckte Fläche 3,7 mal so groß war wie vorher. Im übrigen blieb die Versuchsanordnung ungeändert.

Mehrere Beobachtungen wurden beim Druck 5,7 mm und mehreren verschiedenen Abständen gemacht. Fig. 13,

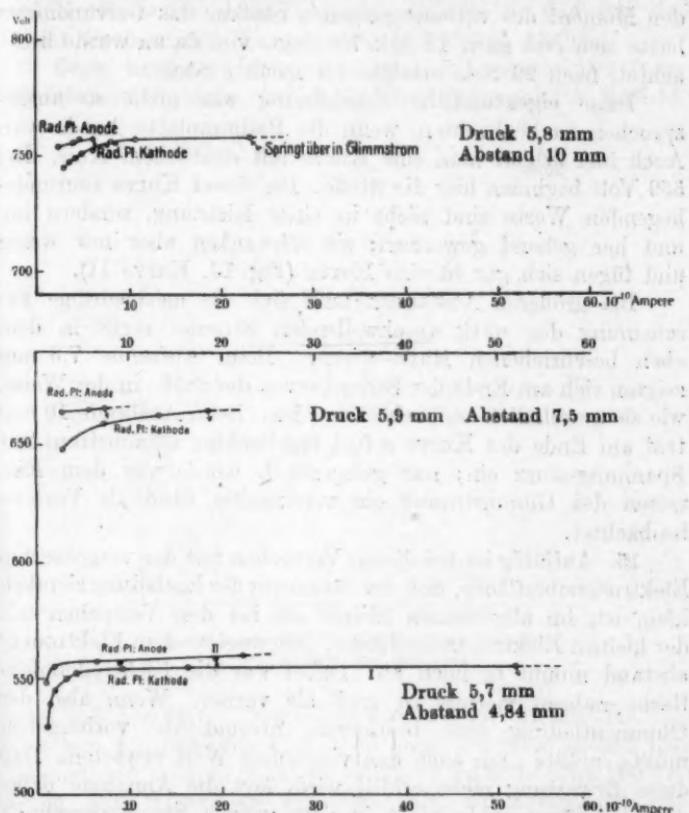


Fig. 13. Kurven bei vergrößerter Elektrodenfläche. Durchmesser 19 mm.

↗ bedeutet Beginn der Stoße.

Kurve I (Abstand 4,84 mm, Radiumplatte Kathode), zeigt ein deutliches Knie und reicht bis 555 Volt. Bei dieser Spannung war der Strom anfangs $16 \cdot 10^{-10}$ Amp., schwoll dann spontan an, zuerst langsam, dann schneller bis über $50 \cdot 10^{-10}$ Amp., und dann kam ein Stoß. Darauf ging der Strom zurück,

schwoll wieder an im Laufe einer halben Minute, dann kam von neuem ein Stoß. Das wiederholt sich so fortwährend. Das Anschwellen des Stromes wurde mehrmals mit Galvanometer und Uhr verfolgt. Ein Beispiel gibt Fig. 14: 0 bedeutet den Moment des vorhergegangenen Stoßes, das Galvanometer hatte sich erst nach 18 Sek. beruhigt, von da an wurde beobachtet, nach 29 Sek. erfolgte der nächste Stoß.

Diese eigentümliche Erscheinung war nicht so ausgesprochen zu beobachten, wenn die Radiumplatte Anode war. Auch hier erhielt man eine Kurve mit deutlichem Knie. Bei 559 Volt beginnen hier die Stöße. Die dieser Kurve zugrundeliegenden Werte sind nicht in einer Richtung, sondern hin und her gehend gewonnen; sie schwanken aber nur wenig und fügen sich gut in eine Kurve (Fig. 13, Kurve II).

Bei größeren Abständen fand sich die merkwürdige Erscheinung des stark anschwellenden Stromes nicht in dem eben beschriebenen Maße wieder. Beim Abstande 7,3 mm zeigten sich am Ende der Stromkurven die Stöße in der Weise, wie sie gewöhnlich beobachtet wurden. Beim Abstande 10 mm trat am Ende der Kurve sofort regelrechter Glimmstrom mit Spannungssturz ein; nur gelegentlich wurde vor dem Eintreten des Glimmstromes ein vereinzelter Stoß als Vorbote beobachtet.

15. Auffällig ist bei diesen Versuchen mit der vergrößerten Elektrodenoberfläche, daß der Strom vor der Entladung ziemlich klein ist, im allgemeinen kleiner als bei den Versuchen mit der kleinen Elektrodenoberfläche. Mit wachsendem Elektrodenabstand nimmt er noch ab. Dabei war die Elektrodenoberfläche nahezu viermal so groß als vorher. Wenn also der Glimmentladung eine bestimmte Stromdichte vorhergehen müßte, müßte man auch den vierfachen Wert erwarten. Daß diese Erwartung nicht erfüllt wird, legt die Annahme nahe, daß die Stromdichte nicht in dem ganzen Stromquerschnitt gleichmäßig answillt, sondern in einem irgendwie begünstigten Stromfaden besonders hoch ansteigt, wo dann jedenfalls auch die Glimmentladung zuerst einsetzt.

Versuch einer Deutung der Ergebnisse.

16. Die eigentümlichen von mir beobachteten Erscheinungen lassen sich nur verstehen, wenn man beachtet, daß,

wie Franck und Hertz¹⁾, Gehreke und Seeliger²⁾ von Baeyer und Tool³⁾ gezeigt haben, durch einen elektrischen Strom in ionisierter Luft auf der Oberfläche der Elektroden elektrische Doppelschichten erzeugt werden, die in ihrer Natur und Größe außerordentlich variieren, offenbar dadurch, daß in der Gashaut des Metalles Gasionen kleben bleiben.

Ganz besonders deutlich zeigen die auf p. 123 u. f. beschriebenen Versuche, bei denen die Radiumplatte Kathode

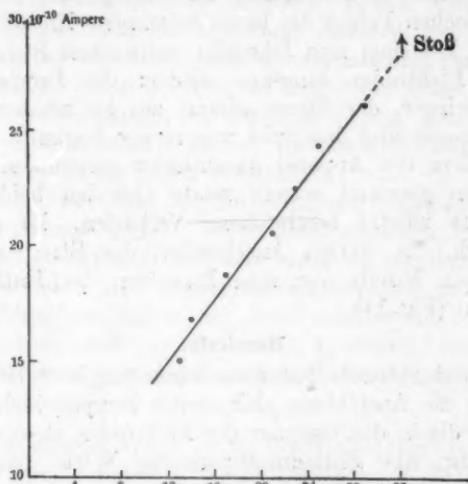


Fig. 14. Anwachsen des Stromes zwischen zwei Stößen mit der Zeit.

war, daß der Strom Doppelschichten hervorruft, die das Feld zwischen den Scheiben bedeutend heruntersetzen, so daß man Spannungen anlegen muß, die vielleicht um mehr etwa 100 Volt höher sein mögen als die eigentliche Entladungsspannung. Setzt dann allerdings die gleich recht kräftige Glimmentladung ein, so schwächt der starke Strom die Doppelschichten, so daß hinterher die Entladungsspannung niedriger gefunden

1) J. Franck u. G. Hertz, Verh. d. D. Physik. Ges. 15, p. 391. 1913.

2) E. Gehreke u. R. Seeliger, Verh. d. D. Physik. Ges. 14, p. 1024.

3) O. v. Baeyer u. A. Tool, Verh. d. D. Physik. Ges. 13, p. 569. 1911.

wird. Aber ein nur kurz andauernder schwacher Strom treibt sie sogleich wieder in die Höhe.

Bei der umgekehrten Schaltung, wo die Radiumplatte Anode war, waren die Doppelschichten, die von schwächeren Strömen gebildet wurden, weit geringer. Deshalb tritt hier schon bei weit geringerer Spannung wenigstens der Beginn einer Entladung ein. Aber in diesem Falle setzt der verstärkte Strom der Entladung sofort die Doppelschichten herauf, und zwar so bedeutend, daß infolge der Schwächung des elektrischen Feldes die kaum begonnene Entladung schon abbricht. Bei dem nun folgenden schwachen Strom erholen sich die Elektroden langsam wieder: die Doppelschichten werden geringer, der Strom nimmt zu, bis wieder die Entladung einsetzt und das Spiel von neuem beginnt.

Nachdem der Apparat auseinander genommen war und die Platten gereinigt waren, zeigte sich bei beiden Schaltungen das zuletzt beschriebene Verhalten. Es gelang da gelegentlich, ein starkes Anschwellen des Stromes während einer halben Minute vor dem Einsetzen der Entladung zu beobachten (Fig. 14).

Resultate.

1. Durch störende Nebenerscheinungen, höchstwahrscheinlich durch die Ausbildung elektrischer Doppelschichten durch Gasionen, die in der Gashaut der Elektroden stecken bleiben, können für die Entladungsspannung Werte vorgetäuscht werden, die viel zu hoch liegen.
2. Da die Doppelschichten durch kräftige Entladungen zerstört, durch schwächere Ströme aber verstärkt werden, so können sie Hysteresiserscheinungen der Glimmentladung vortäuschen.
3. Im allgemeinen bringt der noch ziemlich schwache Strom einer beginnenden Glimmentladung zuerst eine Verstärkung der dem Feld entgegenwirkenden Doppelschichten hervor. Die Folge davon ist, daß bei Spannungen, die nur wenig über der Entladungsspannung liegen, noch nicht die regelrechte Glimmentladung eintritt, sondern nur einzelne ziemlich unregelmäßige, sehr kurz dauernde Glimmstöße einsetzen, die bei wachsender Spannung immer häufiger werden, bis schließlich bei einer ziemlich hohen Spannung die dauernde Glimmentladung sich ausbildet.

4. Sichtbares Leuchten tritt immer erst nach der Überschreitung des Spannungsmaximums der Stromspannungskurve, d. h. der Entladungsspannung, ein, wenn der Strom auf dem labilen Teil der Kurve zur „Entladung“ wird. Bei dem Stoßionisierungsstrom auf dem ansteigenden Teil der Kurve vor dem Überschreiten des Spannungsmaximums ist auch mit den Stäbchen nach 10 Minuten Ausruhen im Dunkeln niemals nur die Spur einer Lichterscheinung wahrzunehmen. Wenn man also, wie beispielsweise in meiner ersten Versuchsreihe und auch in den Versuchen anderer Autoren, vor der Entladung scheinbar eine ansteigende Stromspannungskurve findet, bei der das Gas schon leuchtet, so kann man sicher sein, daß störende Nebenwirkungen an der Erscheinung beteiligt sind, daß man in Wirklichkeit keinen einfachen Stoßionisierungsstrom, sondern Entladungen beobachtet,

5. Der Endwert des der Entladung vorhergehenden Stoßionisierungsstromes nimmt unter sonst gleichen Umständen mit größerer Elektrodenoberfläche nicht zu, die durchschnittliche Stromdichte des Stoßionisierungsstromes ist also für die Entstehung der Entladung nicht maßgebend. Man darf wohl vermuten, daß die Entladung in einem besonders begünstigten Stromfaden, der den ersten Entladungskanal bildet, beginnt.

Die vorliegende Arbeit ist im Greifswalder Physikalischen Institut gemacht worden. Hrn. Professor G. Mie möchte ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu diesen Untersuchungen, sein reges Interesse und seine ständige Unterstützung im Verlaufe der Arbeit herzlichst danken.

(Eingegangen 11. Dezember 1916.)

**2. Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität
und der Gravitation;
von Ernst Reichenbächer.**

Einleitung. Die Möglichkeit einer elementaren mathematischen Erklärung der Elektrizität und der Gravitation.

I. Hauptteil. Die Elektrizität.

1. Abschnitt. Geometrische Deutung der elektrischen Fundamentalgrößen.
2. Abschnitt. Elektron und Äther.
3. Abschnitt. Coulombs Gesetz.

II. Hauptteil. Die Gravitation.

1. Abschnitt. Die Verzerrung und Krümmung des Raumzeitkontinuums infolge der Elementardrehung.
2. Abschnitt. Die anziehende Wirkung der Gravitation.
3. Abschnitt. Der Einfluß der Gravitation auf die elektrischen Fundamentalgrößen.
4. Abschnitt. Die Gesamtwirkung aller Elektronen und die Weltfunktion.

Schluß. Der Einfluß der Materie auf die elektromagnetischen Fundamentalgrößen und der Atombau.

Einleitung.

**Die Möglichkeit einer elementaren mathematischen Erklärung
der Elektrizität und der Gravitation.**

Die Versuche, die rätselhafte Wirkung der Gravitation zu erklären, sind durch die Schöpfung der Relativitätstheorie in ein neues Stadium getreten und haben in den Ansätzen von Mie¹⁾ und Einstein²⁾, deren Theorien dann durch Hilbert³⁾ zusammengefaßt worden sind, bereits zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Wenn im folgenden versucht werden

1) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie, Ann. d. Phys. **37**. p. 571. 1912; **39**. p. 1. 1912; **40**. p. 1. 1913.

2) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **40**. p. 769. 1916.

3) D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik. Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1915, Math.-physik. Kl. H. **3**. p. 395.

soll, eine neue Erklärung für die grundlegenden Gesetze der Elektrizität und der Gravitation, die von Maxwell, Coulomb und Newton, zu bringen, so ist dies damit begründet, daß es mir gelungen ist, eine einfache geometrische Deutung für den elektromagnetischen Sechservektor zu finden, aus der unter Hinzunahme weniger vereinfachender Hilfshypothesen diese Gesetze sich mit Notwendigkeit ergeben. Dabei ist einerseits die Klippe der Explosion des Elektrons durch Abstoßung seiner einzelnen Teile vermieden, die in den Theorien von Mie und Einstein¹⁾ noch vorhanden war, andererseits aber ein Weg gewonnen, der zu einem gewissen Verständnis für das Auftreten der Mieschen Weltfunktion führt.

Die grundlegende Annahme, alles physikalische Sein, sei es Materie, Gravitation oder Elektrizität, ist geometrisch zu erklären, d. h. die mit diesen Begriffen verbundenen Vorstellungen sind auf rein mathematische Eigenschaften des vierdimensionalen Raumzeitkontinuums zurückzuführen, überhebt mich der Notwendigkeit, gewisse Minimaleigenschaften, wie sie in den geodätischen Linien und den Hamiltonschen Integralen vorkommen, vorauszusetzen. Das ganze physikalische Problem wird zu einem geometrischen, da alle möglichen Mannigfaltigkeiten Erscheinungen zeigen müssen, die der Elektrizität und der Gravitation entsprechen, wenn sie einer Veränderung unterworfen werden, die wir als den elektromagnetischen Sechservektor deuten, und dabei stets die einfachsten Nebenannahmen gemacht werden.

I. Hauptteil. Die Elektrizität.

1. Abschnitt. Geometrische Deutung der elektrischen Fundamentalgrößen.

Die gewöhnliche Relativitätstheorie von Lorentz und Einstein hat Minkowski²⁾ zur Schöpfung seines vierdimensionalen Raumzeitkontinuums geführt, in dem man die Euklidische Geometrie als gültig ansehen kann, wenn man

1) Vgl. H. Reißner, Eigengravitation des elektrischen Feldes, Ann. d. Phys. 50, p. 106. 1916.

2) H. Minkowski, Raum und Zeit. Vortrag, gehalten auf der 80. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Köln 1908; vgl. Fortschr. d. Math. Wissensch. in Monographien, von O. Blumenthal, Heft 2: Das Relativitätsprinzip. p. 56.

der einen Veränderlichen, die der Zeit entspricht, nur imaginäre Werte zuschreibt. Unter dieser Voraussetzung kann also die Minkowskische Welt als lineare Mannigfaltigkeit von vier Ausdehnungen angesehen werden. Es muß ihr also jegliche Krümmung im Riemannschen Sinne fehlen.

Dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn man die gewöhnliche Relativitätstheorie durch Einsteins Verallgemeinerung ersetzt; es muß vielmehr die Wahl der zulässigen Koordinatensysteme bedeutend eingeschränkt werden, wenn der Bedingung genügt werden soll, daß unsere Welt als ein krümmungsfreies Raumzeitkontinuum angesehen werden kann. Ob diese Annahme den Tatsachen überhaupt entspricht, muß die weitere Untersuchung lehren. Wenn aber unsere Welt krümmungsfrei ist, so liegt ohne besonderen Grund keine Veranlassung vor, von der gewöhnlichen Relativitätstheorie abzuweichen. Diese legt bekanntlich ein orthogonales geradliniges isometrisches Koordinatensystem zugrunde, und dies ist auch das einzige, das die Gleichwertigkeit aller Raumzeitpunkte zum Ausdruck bringt. Der Forderung der Isometrie wird durch die Festsetzung der Lichtgeschwindigkeit gleich 1 oder besser gleich i genügt, was Minkowski¹⁾ durch die „mystische“ Gleichung

$$300\,000 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ sec}$$

ausdrückt.

Zur Annahme einer von der gewöhnlichen abweichenden Relativitätstheorie wird man also erst durch die Existenz ungleichartiger Raumzeitpunkte geführt. Solche muß es aber unzweifelhaft geben, da sonst jede Erfahrung unmöglich wäre, und sie sind nach allgemeinem Dafürhalten in den Elektronen und der Materie gegenüber dem freien Äther vorhanden. Daher nimmt Einstein mit Recht an, daß in unendlicher Entfernung von allen Elektronen die gewöhnliche Relativitätstheorie gelten muß, d. h. das Minkowskische Raumzeitkontinuum ungestört ist.

Die Störung, die durch die Elektronen erzeugt wird und uns also zur Annahme eines von dem gewöhnlichen abweichenden Weltkoordinatensystems zwingt, wird nun bekanntlich als der elektromagnetische Sechservektor aufgefaßt. Dieser

1) l. c. p. 66.

ist daher nichts anderes als eine Änderung der einfachen Beziehungen der einzelnen Raumzeitelemente der Minkowskischen Welt zueinander und wird von mir durch eine Drehung derselben gegen den Normalzustand definiert. Diese Drehung erfolgt selbstverständlich, da es sich um vier Dimensionen handelt, im allgemeinen in zwei „dualen“, d. h. zueinander senkrechten, sich aber nur in einem Punkte schneidenden Ebenen, z. B. der $x_0 x_1$ -¹⁾ und der $x_2 x_3$ -Ebene. Aus dieser Definition des elektromagnetischen Sechsvektors durch die Drehung des vierdimensionalen Raumzeitelementes gegen den Minkowskischen Normalzustand folgen unmittelbar die Maxwell'schen Gesetze und unter Hinzunahme weniger einfacher Hypothesen auch die von Newton und Coulomb.

Die Änderungen, die in einer Mannigfaltigkeit durch Drehung ihrer Elemente gegen den Normalzustand eintreten, lassen sich ganz unabhängig von ihrer physikalischen Bedeutung für unsere vierdimensionale Welt in jeder beliebigen betrachten, die mehr als eine Ausdehnung besitzt, und es wird zur Veranschaulichung der Ableitungen dienlich sein, als solche Mannigfaltigkeit zunächst eine Ebene zu behandeln, wobei auch fürs erste von dem imaginären Charakter der Veränderlichen x_0 abgesehen werden soll. Der Minkowskische Normalzustand dieser Ebene wird durch ein rechtwinkliges, geradliniges und isometrisches System ausgedrückt, dessen Koordinaten x_0 und x_1 heißen sollen, wobei x_0 dem y und x_1 dem x der gewöhnlichen Bezeichnungsweise entspricht. Aus diesem Normalzustand soll nun ein Störungs- oder Spannungszustand dadurch hergeleitet werden, daß sich jedes Flächenelement um einen Winkel dreht, der naturgemäß von seiner Lage stetig abhängen soll. Durch diese Drehung wird jedes System senkrechter Trajektorien in ein ebensolches übergeführt. Insbesondere gilt dies auch für die Parameterlinien $x_0 = \text{const.}$ und $x_1 = \text{const.}$ der Normalkoordinaten, die in die Parameterkurven $\xi_0 = \text{const.}$ und $\xi_1 = \text{const.}$ eines neuen orthogonalen Systems, das Spannungssystem heißen soll, verwandelt werden.

Analytisch kann dieser Übergang durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

1) Ich bezeichne allgemein die zeitliche Koordinate mit dem Index 0 statt mit 4, um von der Dimensionszahl unabhängig zu sein.

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{g_0} d\xi_0 = dx_0 \cos \vartheta - dx_1 \sin \vartheta, \\ \sqrt{g_1} d\xi_1 = dx_0 \sin \vartheta + dx_1 \cos \vartheta. \end{cases}$$

Darin bedeutet ϑ den Drehungswinkel des Elementes der Mannigfaltigkeit; die Größen g sind durch die Formeln gegeben:

$$(2) \quad g_i^{-1} = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \right)^2; \quad g_i = \left(\frac{\partial x_0}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \right)^2.$$

Sie sind auch, wenn ϑ in jedem Punkte bekannt ist, nicht völlig bestimmt, da sie dadurch geändert werden können, daß man neue Veränderliche durch $\xi_0 = f_0(x_0)$ und $\xi_1 = f_1(x_1)$ mit ganz willkürlichen Funktionen f_0 und f_1 einführen kann, ohne daß an dem Aussehen des Spannungssystems etwas geändert wird.

Das Quadrat des Linienelementes ist

$$(3) \quad ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 = g_0 d\xi_0^2 + g_1 d\xi_1^2.$$

Das Element der ξ_i -Linie ds_i folgt hieraus zu:

$$(4) \quad ds_i = \sqrt{g_i} d\xi_i.$$

Überträgt man diese Beziehungen auf mehrere Dimensionen, so erhält man nicht durch jede beliebige Drehung der Elemente aus einem Orthogonalsystem wieder ein neues; es muß vielmehr die Drehung bestimmten Bedingungen genügen, die im vierdimensionalen Falle der einen Gruppe der Maxwellschen Gleichungen entsprechen, die den elektromagnetischen Sechervektor als Rotation des Viererpotentials erscheinen läßt. Darauf soll später noch eingegangen werden. Die Gleichungen (2) bis (4) können ohne weiteres auf mehr Dimensionen übertragen werden.

Um die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen herzuleiten, betrachte ich zunächst wieder in der Ebene die Krümmung der Parameterkurven des Spannungssystems. Eine leichte Überlegung liefert die Beziehung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s_i} = \left| \frac{1}{\rho_i} \right|,$$

worin ρ_i der Krümmungsradius der ξ_i -Linie ist. Um die Vorzeichen zu bestimmen, setze ich fest, daß die Krümmungs-

radien positiv in der Richtung von den Mittelpunkten aus zu rechnen seien; dann ergibt sich:

$$(5) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} = \frac{1}{\varrho_0}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = -\frac{1}{\varrho_1}.$$

Ersetzt man hierin ds_i durch $\sqrt{g_i} d\xi_i$, so erhält man nach Multiplikation mit $\sqrt{g_i}$:

$$(6) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} = \frac{\sqrt{g_0}}{\varrho_0}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} = -\frac{\sqrt{g_1}}{\varrho_1}.$$

Hieraus kann man die Abhängigkeit der Drehung ϑ von x_0 und x_1 ermitteln:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1},$$

also nach (1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{g_0}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{g_1}},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_0} \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{g_0}} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_1} \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{g_1}}.$$

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} = \frac{\cos \vartheta}{\varrho_0} - \frac{\sin \vartheta}{\varrho_1}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = -\frac{\sin \vartheta}{\varrho_0} - \frac{\cos \vartheta}{\varrho_1}. \end{cases}$$

Löst man diese Gleichungen nach der Krümmung $1/\varrho_1$ auf, so erhält man:

$$(8) \quad \frac{1}{\varrho_1} = -\sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x_0} - \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial x_0} - \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial x_1}.$$

Ist das Koordinatensystem so gelegt, daß die Änderung der Größe ϑ in der Richtung x_0 verschwindet, so ist die Gleichung (8) zu ersetzen durch:

$$(9) \quad \frac{d \sin \vartheta}{d x_1} = -\frac{1}{\varrho_1}.$$

Eine solche Wahl des Koordinatensystems ist wenigstens für die nächste Umgebung eines beliebig gewählten Punktes möglich. Da nämlich das zulässige Wertesystem von ϑ nur einfach unendlich ist, so müssen, von Ausnahmefällen ab-

gesehen, in der Nachbarschaft jedes Punktes andere vorkommen, für die der Wert der Drehung derselbe ist wie für den ersten; solche Punkte „gleicher Drehung“ lassen sich durch Kurven verbinden, die „Isogonen“ heißen sollen. Die x_0 -Achse soll nun in dem betreffenden Punkt so gelegt werden, daß sie entweder mit der Isogone oder ihrer Tangente zusammenfällt.

Eine andere Ableitung der Gleichung (9) kann die Tatsache benutzen, daß für

$$x_0 = y, \quad x_1 = x: \quad \operatorname{tg} \vartheta = y', \quad \sin \vartheta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

und

$$\rho = -\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y''}$$

ist. Dann ist aber:

$$(10) \quad \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Beim Übergang zu mehr als zwei Ausdehnungen könnte es zunächst zweifelhaft erscheinen, ob an dem Begriff der Isogonen festgehalten werden kann.

Als für einen flächenhaften Vektor stehen nämlich für die Drehung ϑ bei n Dimensionen $\frac{n(n-1)}{2}$ fach unendlich viel Werte zur Verfügung, so daß es zweifelhaft erscheinen könnte, ob in der Nachbarschaft eines Punktes andere mit gleicher Drehung vorkommen, die mit ihm durch eine Isogone verbunden werden können. Durch die Bedingung, daß durch die Drehung ein orthogonales System in ein anderes übergeführt wird, d. h. durch die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen, wird aber die Möglichkeit der Wahl des Drehungsvektors so beschränkt, daß dies tatsächlich überall, wiederum von Ausnahmepunkten abgesehen, wo die Isogonen zu einem einzigen Punkte entarten, möglich ist. Legt man nun wieder die x_0 -Achse in die Richtung der Isogonen, so erhält man an Stelle von Gleichung (9) oder (10):

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sin \vartheta_{01}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sin \vartheta_{02}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sin \vartheta_{03}}{\partial x_3} + \dots = \operatorname{Div}_0 \sin \vartheta \\ = - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \dots \right). \end{array} \right.$$

Diese Gleichung entspricht der ersten aus der zweiten Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen, wenn diese auf ein Ruhkoordinatensystem bezogen sind. Sie wird ergänzt durch

$$(12) \quad \operatorname{Div}, \sin \vartheta = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots),$$

die ohne weiteres dann gegeben ist, wenn der Drehungsvektor in eine einzige Ebene fällt, die außerdem die x_0 -Achse enthält. Wie man später sehen wird, ist dies für die Elementarwirkung eines Elektrons der Fall. Die elektrische Ruhdichte entspricht also der mittleren Krümmung des $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Raumes im Spannungssystem.

In einem Koordinatensystem, dessen x_0 -Achse in die Richtung der Isogonen fällt, ist also auch die zweite Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen erfüllt, wenn man dem Sinus des Drehungswinkels die Bedeutung des elektromagnetischen Sechservektors und der mittleren Krümmung des durch die Drehung aus dem $x_1 x_2 x_3$ -Raum entstehenden $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Raumes der elektrischen Ruhdichte gibt.

In einem derartigen System ist es nun auch möglich, die Größe $\sin \vartheta$ selbst als Differentialquotient einer anderen Funktion — q darzustellen. Wandert man nämlich längs einer x_1 -Linie, so wird man immer neue ξ_1 -Linien schneiden und bei jedem Schritt $d x_1$ ein Stück — $d q$ einer ξ_0 -Linie, das zwischen einer ξ_1 -Linie und ihrer Nachfolgerin liegt, hinter sich lassen. Die Summe — q aller dieser Stücke kann als Potential angesehen werden. Diese Definition läßt sich unmittelbar auf mehrere Dimensionen übertragen; es muß nur die x_1 -Linie durch eine beliebige Gerade des $x_1 x_2 x_3$ -Raumes und die ξ_1 -Linien durch die $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Räume ersetzt werden. Deren Existenz war ja als einschränkende Bedingung für die Wahl der ϑ gefordert worden; man sieht jetzt ein, daß sie Anlaß zur Definition der Größe q gibt. Damit ist, zunächst im Ruhssystem, das Potential gegeben, als dessen Ableitungen die Komponenten des elektrischen Vektors erscheinen. Da nach (4) : $-d q = -\sqrt{g_0} d \xi_0$ ist, läßt sich dieses Potential auch in der Gestalt

$$(13) \quad q = - \int \sqrt{g_0} d \xi_0$$

angeben. Wäre $g_0 = 1$, so würde q die Differenz der beiden Werte der Koordinate ξ_0 in dem betrachteten und einem be-

liebigen, aber festen zweiten Punkte sein, so daß für diesen Grenzfall q durch die Koordinate ξ_0 bis auf eine Konstante ersetzt werden könnte. Für verschiedene $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Räume ist die Integrationskonstante zweckmäßig so zu wählen, daß die Punkte gleicher Drehung auch gleiches Potential besitzen. Es wäre dann in dem Grenzfall $g_0 = 1$ nicht ξ_0 , sondern $\xi_0 - x_0$ als Potentialfunktion zu wählen.

Bisher war ein Koordinatensystem zugrunde gelegt worden, dessen x_0 -Achse in die Richtung der Isogonen, d. h. der Linien, längs deren sich die Drehung ϑ nicht ändert, fällt, so daß die Fundamentalgrößen, nämlich Drehung, mittlere Krümmung und Potential, von x_0 unabhängig ausfallen. Nun soll untersucht werden, inwiefern die Wahl dieses Systems eine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt; zu diesem Zweck sind die Isogonen einer eingehenden Prüfung zu unterziehen.

Zunächst ist es selbstverständlich, daß zwei Isogonen sich nirgends schneiden dürfen, da sonst das im Schnittpunkt liegende Raumzeitelement zwei verschiedenen Drehungen unterworfen wäre. Sonst läßt sich über die Isogonen ohne weiteres nichts aussagen; sie können krumm oder gerade sein. Sind sie nirgends gekrümmmt, so müssen sie in einer Ebene notwendig parallel werden, um obiger Bedingung zu genügen.

Soll die Annahme, daß die Fundamentalgrößen von x_0 unabhängig sind, nicht nur für die Nachbarschaft eines Punktes, sondern allgemein gelten, so müssen die Isogonen geradlinig sein. Da die Wahl der Achsenrichtungen des Normalsystems von vornherein beliebig ist, so kann stets die x_0 -Achse in die Richtung dieser geradlinigen Isogonen gelegt werden; ein solches System heiße Haupt- oder Ruhsystem, während jedes andere Normalsystem als Nebensystem bezeichnet werden soll.

Sind die Isogonen gekrümmmt, so kann man ein Hauptsystem nur für die allernächste Nachbarschaft eines Raumzeitpunktes annehmen und ist gezwungen, die Achsenrichtungen zu ändern, wenn man von einem Punkte zum andern übergeht. Dabei aber bietet sich in einem besonderen Falle die Möglichkeit, an den Achsenrichtungen festzuhalten, wenn man in senkrechter Richtung zu den Isogonen, also in räumlicher Richtung, forschreitet, nämlich dann, wenn diese Parallelkurven, d. h. senkrechte Trajektorien einer Schar

linearer Räume sind. Diese Bedingung stimmt mit der Forderung überein, die man allgemein an die sogenannten Weltlinien benachbarter Punkte starrer Körper stellt, und es wird sich herausstellen, daß wir die Isogonen als Weltlinien ansehen können. In diesem Sonderfalle ist also ein und dasselbe Hauptsystem für den ganzen $x_1 x_2 x_3$ -Raum gültig und nur eine Beschränkung auf ein kleines Stück der Isogonen selbst, also in der x_0 -Richtung, nötig.

Geht man nun von einem Haupt- oder Ruhssystem zu einem Nebensystem über, dessen x_0 -Achse nicht mehr in die Richtung der Isogonen fällt, so müssen sich die entwickelten Gleichungen den Sätzen der Relativitätstheorie anpassen, d. h. eine Gestalt annehmen, die bei einer derartigen Umformung unveränderlich ist. Die Drehung ϑ ist, wie gesagt, ein Sechervektor; dagegen erscheinen Potential und Krümmung als Vierervektoren, die in die Richtung der Isogonen fallen. Daraus ergeben sich dann die für jedes Normalsystem gültigen Maxwellschen Gleichungen, die einerseits den Sinus des Drehungswinkels als Rotation des Potentials, andererseits die negative mittlere Krümmung als Divergenz dieses Sinus erscheinen lassen.

2. Abschnitt. Elektron und Äther.

Durch die Krümmung der Isogonen werden natürlich auch die Systeme der Parameterkurven der Spannung, d. h. die ξ -Kurven, beeinflußt, da sie ja mit den Richtungen des jeweiligen Hauptsystems den Winkel ϑ bilden. Jedoch behalten die $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Räume die Eigenschaft, untereinander kongruent zu sein, da ja die Isogonen als Parallelkurven vorausgesetzt waren; aber jeder Raum dieser Schar erscheint gegen den benachbarten nicht nur verschoben, sondern wegen der Krümmung der Isogonen auch gedreht. Nur wenn diese Räume Hyperkugeln oder, da die Werte von x_0 als rein imaginär vorausgesetzt werden, gleichseitige Hyperboloidräume sind, kann von dieser Drehung abgesehen werden, da diese Räume sich nach allen Richtungen invariant verhalten. Soll daher die Richtungsänderung der Isogonen ohne drehenden Einfluß auf die $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Räume sein, so müssen diese als gleichseitige Hyperboloidräume angenommen werden. Sie dürfen natürlich keine zeitlichen Richtungen enthalten und müssen

daher zweischalig sein; von den beiden Schalen darf selbstverständlich nur eine vorausgesetzt werden. Es ist aber nicht nötig, diese Schale sich bis ins Unendliche erstrecken zu lassen; vielmehr wird sich herausstellen, daß man sich auf einen kugelförmigen Ausschnitt aus dieser Schale zu beschränken hat, dessen Radius a gegen den Krümmungsradius ϱ des Hyperboloids verschwindend klein ist ($a : \varrho = \text{ca. } 1 : 10^{21}$). Ein solcher Ausschnitt liegt zwischen zwei parallelen $x_1 x_2 x_3$ -Räumen, von denen der eine ihn im Mittelpunkt berührt, während der zweite ihn nach außen begrenzt, indem er den Hyperboloidraum in einer Kugelfläche mit dem Radius a schneidet. Die Isogonen bilden eine Schar paralleler Linien, die auf dem ersten dieser Räume senkrecht stehen; auf ihnen sind alle die dem gegebenen kongruenten Hyperboloidräume aufgereiht. So entsteht eine zylindrische oder im Falle der Krümmung der Isogonen zylindroidische Röhre, die Primäröhre heißen möge; sie ist die Weltröhre eines Elektrons, während dieses selbst sich in dem zweiten $x_1 x_2 x_3$ -Raum als Kugel mit dem Radius a zeigt. Dadurch ist seine Begrenzung nach außen gegeben; seine innere Natur aber wird durch den Hyperboloidraum bestimmt, und es ist leicht, unter den gegebenen Voraussetzungen die drei elektrischen Fundamentalgrößen zu bestimmen. Es ist zunächst offenbar, daß ein Drehungsvektor nur in den durch die x_0 -Achse des Hauptsystems, die den Mittelpunkt des Hyperboloidraumes mit dem seines kugelförmigen Ausschnittes, d. h. des Elektrons, verbindet, gelegten Ebenen auftreten kann. Bezeichne ich mit r den Abstand irgendeines Punktes des Hyperboloidraumes von der x_0 -Achse, so ist

$$(14) \quad \sin \vartheta = - \frac{i r}{\varrho} = - i \mathfrak{E}.$$

Die Einführung der imaginären Einheit i wird der Tatsache gerecht, daß auf der x_0 -Achse nur imaginäre Werte der Koordinaten vorkommen können. Aus Gleichung (14) ergeben sich die anderen Fundamentalgrößen:

$$(15) \quad \text{Div}_0 \sin \vartheta = - \frac{3i}{\varrho} = - i d,$$

$$(16) \quad q = \frac{i r^2}{2\varrho} + \text{const} = - i \varphi.$$

Durch diese Gleichungen sind der Reihe nach der elektrostatische Vektor \mathfrak{E} , die Ruhdichte d und das elektrostatische Potential φ in jedem Punkte des Elektrons gegeben. Aus der Dichte ergibt sich die Gesamtladung e durch Integration über r in den Grenzen von 0 bis a zu

$$(17) \quad e = 4\pi \int_0^a r^2 \cdot d \cdot dr = \frac{4\pi a^3}{q}.$$

In der Grenzkugel nehmen die Fundamentalgrößen die Werte an:

$$(18) \quad \mathfrak{E} = \frac{a}{q},$$

$$(19) \quad d = \frac{3}{q},$$

$$(20) \quad \varphi = -\frac{a^3}{2q} + \text{const.}$$

Da die Primäröhre räumlich beschränkt ist, ist es nötig, auch noch den übrigen Teil des Raumzeitkontinuums, den ich das Sekundärgebiet nennen will, zu betrachten; denn die Drehung ϑ der Elementarteile wird, weil sie eine stetige Funktion sein soll, sich natürlich in dieses Gebiet fortsetzen. Für dieses sind zunächst nur die Größen ϑ und q in der kugelförmigen Begrenzung bekannt; in welcher Weise sich ihre stetige Änderung vollzieht, wird erst durch den Wert der Größe d , die der mittleren Krümmung des $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Raumes entspricht, bestimmt. Die geringste Abweichung vom Normalzustand erhält man, wenn man diese gleich 0 annimmt. Da nun ein Drehungsvektor nur in den durch die x_0 -Achse gelegten Ebenen auftreten kann, ergibt sich durch Umrechnung der Maxwell'schen Gleichungen auf räumliche Polarkoordinaten:

$$(21) \quad \sin \vartheta = -\frac{i a^3}{q r^3}; \quad \mathfrak{E} = \frac{a^3}{q r^3},$$

und hieraus folgt:

$$(22) \quad q = -\frac{i a^3}{q r}, \quad \varphi = \frac{a^3}{q r}.$$

In Gleichung (22) ist die Integrationskonstante weggelassen, damit das Potential im Unendlichen verschwindet. Da es eine stetige Funktion sein soll, lassen sich die Kon-

stanten der Gleichungen (16) und (20) hieraus bestimmen, und es wird genauer:

$$(16) \quad q = \frac{ir^2}{2\varrho} - \frac{3ia^2}{2\varrho},$$

$$(20) \quad \varphi = -\frac{r^2}{2\varrho} + \frac{3a^2}{2\varrho}.$$

Sind die Fundamentalgrößen wie eben angesetzt gegeben, so ist, da der stetige Übergang der Größen q und ϑ überall gewahrt ist, damit das Sekundärgebiet mit der Primäröhre in Einklang gebracht. Durch seine bloße Existenz gibt also der Hyperboloidausschnitt, d. h. das Elektron, Anlaß zur Drehung sämtlicher Raumzeitelemente, also zur Störung des elektromagnetischen Gleichgewichtes, in dem umgebenden Sekundärgebiete, das wir mit dem Äther identifizieren können.

Wenn nun die Isogonen gekrümmmt sind, so soll der Einfachheit halber nur der Fall besprochen werden, daß ihre Krümmung konstant ist, daß sie also gleichseitige Hyperbeln sind, deren Mittelpunkte sämtlich in einer Ebene des $x_1 x_2 x_3$ -Raumes liegen. Das Stück des Hyperboloidraumes, das wir als das Wesentliche des Elektrons erkannt hatten, lag zwischen zwei parallelen $x_1 x_2 x_3$ -Räumen, einem Tangenten- und einem Sekantenraum; da die Isogonen auf ersterem senkrecht stehen, müssen ihre Krümmungsmittelpunkte auch in diesem Raum liegen. Von diesem besitzt der Sekantenraum, in dem die Grenzkugel des Elektrons liegt, den Abstand

$$b = -i(\sqrt{a^2 + \varrho^2} - \varrho) \sim -\frac{ia^2}{2\varrho}$$

vorwärts oder rückwärts in zeitlicher Richtung. Auf diesem Raume stehen die Isogonen keineswegs mehr senkrecht; ist ihr Krümmungsradius σ , so bilden sie mit der Senkrechten vielmehr einen Winkel ϑ , der durch die Gleichung

$$(23) \quad \sin \vartheta = \frac{b}{\sigma} = -\frac{ia^2}{2\varrho\sigma}$$

gegeben ist. Da σ nicht für alle Punkte des Elektrons gleich, sondern von dem dem Krümmungsmittelpunkte nächsten bis zum fernsten sich um ungefähr $2a$ ändert, sind auch die Werte von ϑ für die einzelnen Punkte im allgemeinen nicht gleich; wenn aber a nur sehr klein ist, kann man ohne großen

Fehler den Wert des Mittelpunktes als für alle gültig annehmen.

Die Krümmung der Isogonen bringt also in diesem Sinne doch eine Drehung der Raumzeitelemente gegen ihr Hauptsystem um diesen Winkel ϑ hervor, wenn sie auch wegen der Invarianz des Hyperboloidraumes gegen eine Richtungsänderung keine Verlagerung der einzelnen Teile des Elektrons gegeneinander erzeugen kann.

3. Abschnitt. Coulombs Gesetz.

Diese Krümmungsdrehung ϑ ist nun insofern von großer Bedeutung, als sich durch sie ein Elektron in das Feld eines anderen, d. h. in dessen Sekundärgebiet, einfügen kann, ohne daß die Stetigkeit des Drehungsvektors gestört wird. Es wird sich also jede Primäröhre in einem fremden Sekundärgebiet so krümmen, daß ihre Krümmungsdrehung der Elementardrehung des betreffenden Sekundärgebietes in diesem Punkte entspricht. Hieraus erklärt sich die gegenseitige Anziehung und Abstoßung der Elektronen. Die Wirkung findet aber immer nur zwischen ganzen Elektronen, nicht zwischen den Teilen eines einzelnen unter sich statt; denn jedes Elektron befindet sich mit seinem Sekundärgebiet im Ausgleich, da, wie früher ausgeführt, in der Grenze der stetige Übergang des Potentials und der Drehung gesichert ist.

Ob Anziehung oder Abstoßung erfolgt, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die Drehung der Elementarteile des Feldes erfolgt so, daß die ξ_0 -Linien nach dem Krümmungsmittelpunkte des erzeugenden Elektrons hin konvergieren. Die Isogonen des zweiten Elektrons müssen sich dieser Richtungsänderung anbequemen; sie werden also in dem Grenzraum seiner Weltröhre ebenfalls nach dem Mittelpunkte des ersten weisen. Liegt nun der Krümmungsmittelpunkt des zweiten auf derselben Seite, so werden sie bei der Annäherung an diesen erst den Berührungsraum senkrecht durchsetzen, also ihre ursprüngliche Neigung zum erzeugenden Elektron wieder aufgeben müssen. Ihre Krümmung wird sie also von dem ersten hinwegführen. Bei ungleicher Lage der Krümmungsmittelpunkte der Elektronen tritt natürlich das Gegen teil, also Anziehung, ein. Diese Erscheinungen sind durch die imaginäre Natur der Zeitachse bedingt. In einer nur reellen

Mannigfaltigkeit ergeben gleiche Zeichen Anziehung, ungleiche Abstoßung (vgl. Fig. 1).¹⁾

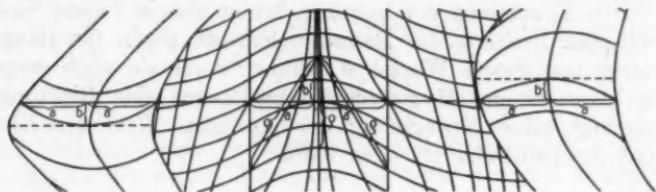


Fig. 1.

Die Stärke der elektrischen Wirkung ergibt sich aus der Gleichsetzung der beiden Werte von $\sin \vartheta$ in (21) und (23), wobei die Radien der beiden Elektronen durch die Indizes I und II unterschieden und höhere Potenzen von a^2/ρ^2 vernachlässigt werden:

$$\frac{-i a_{II}^2}{2 \rho_{II} \sigma_{II}} = -\frac{i a_I^2}{\rho_I r^2},$$

$$\frac{a_{II}^2}{2 \rho_{II}} \cdot \frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{a_I^2}{\rho_I} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Hieraus lässt sich die Krümmung $1/\sigma_{II}$, die als Beschleunigung zu deuten ist, berechnen:

$$(24) \quad \frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{2 \rho_{II}}{a_{II}^2} \cdot \frac{a_I^2}{\rho_I} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Durch Multiplikation mit

$$\frac{8 \pi^2 a_{II}^5}{\rho_{II}^3}$$

erhält man hieraus:

$$(25) \quad \frac{8 \pi^2 a_{II}^5}{\rho_{II}^3} \cdot \frac{1}{\sigma_{II}} = \frac{4 \pi a_I^2}{\rho_I} \cdot \frac{4 \pi a_{II}^2}{\rho_{II}} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

1) Die beigegebene Figur stellt einen Schritt längs der $x_0 x_1$ -Ebene dar. In der Mitte zeigt sie die Primärröhre eines ruhenden Elektrons mit eingeziehenen ξ_0 - und ξ_1 -Linien, die das Feld im Innern und im Äußeren bestimmen. Die drei senkrechten Geraden sind die beiden Grenz- und die Mittelisogone. Rechts ist die abgestoßene Primärröhre eines Elektrons gleicher Krümmung und links die angezogene eines solchen entgegengesetzter Krümmung der ξ_1 -Linie gezeichnet. Die gestrichelten Linien sind die Tangenten, auf denen die Isogenen der beschleunigten Elektronen senkrecht stehen.

Nun war

$$\frac{4\pi a^3}{q}$$

die Ladung e eines Elektrons; deutet man

$$\frac{8\pi^2 a^5}{q^2}$$

als seine träge Masse m , so erhält man für $1/\sigma = \beta$:

$$(26) \quad m_n \beta_n = \frac{e_1 e_{II}}{r^3},$$

das Coulombsche Gesetz. Bemerkenswert ist noch die Gleichung:

$$(27) \quad m = \frac{e^2}{2a} \quad \text{oder} \quad a = \frac{e^2}{2m},$$

die Ladung und träge Masse eines Elektrons in Beziehung setzt.

II. Hauptteil. Die Gravitation.

1. Abschnitt. Die Verzerrung und Krümmung des Raumzeitkontinuums infolge der Elementardrehung.

In den bisherigen Ableitungen ist noch keine Rücksicht darauf genommen worden, daß durch die Drehung der Elementarteile eine Verzerrung herbeigeführt worden ist. Diese soll nunmehr Gegenstand der Untersuchung sein, bei der ich auch wieder zunächst eine reelle Ebene als gegebene Mannigfaltigkeit annehme. In dieser wurde das normale $x_0 x_1$ -System durch die Drehung in das Spannungssystem der $\xi_0 \xi_1$ übergeführt. Durch dieselbe Drehung kommt aber, wenn die x_0 -Linien wieder in die Richtung der Isogonen fallen, ein zweites Spannungssystem, das zum ersten in bezug auf die x_1 -Linien in den kleinsten Teilen symmetrisch liegt, in die Lage des Normalsystems. Für dieses zweite Spannungssystem gelten dieselben Gleichungen wie für das erste, nur ist das Vorzeichen des Winkels ϑ umzukehren. Da die Drehung es aber an Stelle des Normalsystems setzt, so erleidet dieses Verzerrungen, die durch die Gleichungen (3) und (4) ausgesprochen werden, wenn in ihnen ξ_i durch x_i ersetzt wird. Es ist also

$$(28) \quad ds^2 = g_0 dx_0^2 + g_1 dx_1^2,$$

$$(29) \quad ds_i = \sqrt{g_i} dx_i.$$

Die Größen $\sqrt{g_i}$ geben also die Verzerrungen an, die hiermit als Folge der Elementardrehung erscheinen. Im 1. Abschnitt des I. Hauptteiles war aber bemerkt worden, daß ihr Wert nicht völlig bestimmt, sondern von der Annahme der Funktionen $\xi_i = f_i(x_i)$ abhängig ist. Entsprechend sind auch in den Gleichungen (28) und (29) die Größen g_i von zwei Funktionen f_0 und f_1 abhängig, die aber als Argument nur x_1 haben können, da im angenommenen Hauptsystem alle Werte nur von x_1 abhängen. Diese Funktionen können dadurch festgelegt werden, daß man in Gleichung (1) die Werte von

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_0}$$

als gegeben annimmt. Das Nächstliegende wäre, diese Größen als konstant, k_0 und k_1 , anzusehen, da die ξ_0 - und ξ_1 -Linien parallele kongruente Kurven mit den Gleichungen

$$\frac{\xi_0}{k_0} = x_0 + \int \frac{1}{q(x_1)} dx_1,$$

$$\frac{\xi_1}{k_1} = x_0 - \int q(x_1) dx_1$$

sind. Das läßt sich auch für das Innere eines Primärstreifens, der in der Ebene der Primärröhre der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht, durchführen und gibt zu den Gleichungen Anlaß:

$$(30) \quad \sqrt{g_0} = \frac{\cos \vartheta}{k_0}, \quad \sqrt{g_1} = -\frac{\sin \vartheta}{k_1} \dots$$

Man überzeugt sich aber leicht, daß durch Einführung einer neuen Veränderlichen, die übrigens mit q/k_1 übereinstimmt, an Stelle von x_1 die Größe $\sqrt{g_1}$ gleich 1 gemacht werden kann. Es ist deshalb von vornherein zweckmäßiger

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_0} = \sin \vartheta$$

zu wählen, wogegen man an

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = k_0$$

als dem natürlichssten Ansatz für das Innere des unbeeinflußten Primärstreifens festzuhalten hat. Unter diesen Vor-

aussetzungen¹⁾ erhält man:

$$(31) \quad ds^2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2} dx_0^2 + dx_1^2.$$

Um nun zur vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit überzugehen, führe ich räumliche Polarkoordinaten ein, die den Mittelpunkt eines Elektrons zum Pol haben; dann liegt der Drehungsvektor nur in der $x_0 x_1$ -Ebene, wenn x_1 den Radiusvektor bezeichnet.

Für solche Koordinaten gilt nun im unverzerrten System:

$$(32) \quad ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2 dx_3^2.$$

Die Verzerrung beschränkt sich nun auch hier auf das erste Glied, da sie im zweiten wie oben beseitigt werden kann und für das dritte und vierte von vornherein nicht in Betracht kommt. Es gilt demnach nach der Drehung:

$$(33) \quad ds^2 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2} dx_0^2 + dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2 dx_3^2.$$

Diese Gleichung kann aber nur für das Innere der Primäröhre gültig sein, da aus ihr die Riemannsche Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit sich berechnet als [vgl. Gleichung (36)]:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Re = \frac{2}{x_1^2 \cos \vartheta} \frac{d}{dx_1} x_1^2 \frac{d \cos \vartheta}{dx_1} \\ = \frac{2}{x_1^2 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2}}} \frac{d}{dx_1} \frac{x_1^3}{\varrho^2 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2}}} = \frac{6\varrho^2 + 4x_1^2}{(\varrho^2 + x_1^2)^2}. \end{array} \right.$$

Es kann nun nicht angenommen werden, daß der Einfluß des Elektrons sich auch auf die Krümmung des Sekundärgebietes erstreckt; diese muß vielmehr dieselbe bleiben, wie wenn kein Feld vorhanden wäre, also gleich 0. Dann kann im Sekundärgebiet Gleichung (33) nicht richtig sein, womit auch ihre Voraussetzung

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = k_0$$

hinfällig wird. Es ist vielmehr:

$$(35) \quad ds^2 = g_0 dx_0^2 + dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 + x_1^2 \cos^2 x_2 dx_3^2$$

anzusetzen und die Funktion g_0 so zu bestimmen, daß die

1) Würde man

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} = \cos \vartheta$$

setzen, so erhielte man wieder die unverzerrte Ebene. Dieser Ansatz erscheint aber wegen der Parallelität der ξ_1 -Linien nicht so natürlich wie der gewählte.

Riemannsche Krümmung \mathfrak{K} verschwindet, aber in der Grenzkugel g_0 mit seiner ersten Ableitung sich stetig an die Innenwerte anschließt, während es in der Unendlichkeit den normalen Wert 1 annimmt. Bei der Berechnung von \mathfrak{K} muß beachtet werden, daß g_0 nur eine Funktion von x_1 sein kann.

Die Komponenten des Einsteinschen Fundamentaltensors sind, da der Index 4 meinem Index 0 entspricht:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = x_1^2, \quad g_{33} = x_1^2 \cos^2 x_3, \quad g_{44} = g_0.$$

Alle anderen Komponenten verschwinden, wodurch die Fundamentaldeterminante, die ich mit G bezeichnen will, gleich $g_0 g_1 g_2 g_3$ wird und der kontravariante Tensor $g^{\mu\sigma}$ die reziproken Werte des kovarianten $g_{\mu\sigma}$ annimmt. Das Christoffelsche 3-Indizessymbol 1. Art

$$\left[\begin{smallmatrix} k & \varrho \\ \sigma & \varrho \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{k\sigma}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial g_{\sigma\varrho}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{k\varrho}}{\partial x_\sigma} \right)$$

ist nur von 0 verschieden, wenn zwei der Indizes gleich sind. Nur in folgenden Fällen ergibt sich ein Wert, der nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} \left[\begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = x_1; & \left[\begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = -x_1; \\ \left[\begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} 31 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = x_1 \cos^2 x_3; & \left[\begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = -x_1 \cos^2 x_3; \\ \left[\begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} 41 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} g_0'; & \left[\begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} g_0'; \\ \left[\begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] &= \left[\begin{smallmatrix} 32 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} = -x_1^2 \sin x_3 \cos x_2; & \left[\begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial x_1} = x_1^2 \sin x_3 \cos x_2. \end{aligned}$$

Es existieren auch nur die entsprechenden 3-Indizessymbole 2. Art:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} k & \varrho \\ \mu & \varrho \end{smallmatrix} \right\} = g^{\mu\sigma} \left[\begin{smallmatrix} k & \varrho \\ \sigma & \varrho \end{smallmatrix} \right]^{-1};$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{x_1}; & \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} &= g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = -x_1; \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} 31 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = g^{33} \left[\begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{x_1}; & \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} &= g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = -x_1 \cos^2 x_3; \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} 41 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = g^{44} \left[\begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] = \frac{g_0'}{2g_0}; & \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} &= g^{11} \left[\begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] = -\frac{1}{2} g_0'; \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} 32 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = g^{33} \left[\begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right] = -\operatorname{tg} x_3; & \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} &= g^{22} \left[\begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right] = \sin x_3 \cos x_2. \end{aligned}$$

1) Ich bediene mich hier der abkürzenden Schreibweise Einsteins (l. c. p. 781), die die Summationszeichen wegläßt, da stets nur über zweifach auftretende Indizes zu summieren ist.

Von den Komponenten des Krümmungstensors

$$K_{\mu\nu}{}^1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & x \\ x & \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & v \\ x & \end{smallmatrix} \right\} \right) + \left(\left\{ \begin{smallmatrix} \mu & x \\ \lambda & \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \nu & \lambda \\ x & \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & v \\ \lambda & \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda & x \\ x & \end{smallmatrix} \right\} \right)$$

verschwinden alle mit ungleichen Indizes, was an sich selbstverständlich ist und sich auch bei der Durchrechnung bestätigt. Die übrigen werden:

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \right] + \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}^2 + \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}^2,$$

$$K_{11} = -\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1^2} + \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{g_0'}{2g_0} \right)^2,$$

$$K_{11} = \underline{\frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \left(\frac{g_0'}{2g_0} \right)^2};$$

$$K_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \right],$$

$$K_{22} = -\frac{1}{\cos^2 x_2} + 1 - 1 - 1 + \operatorname{tg}^2 x_2 + x_1 \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2g_0} \right] = \underline{x_1 \cdot \frac{g_0'}{2g_0}};$$

$$K_{33} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 31 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 31 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 32 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} 32 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \right] - \left\{ \begin{smallmatrix} 33 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 23 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\};$$

$$K_{33} = \cos^2 x_3 - \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2 - \cos^2 x_3 - \cos^2 x_2 - \sin^2 x_3 - \sin^2 x_2 + x_1 \cos^2 x_2 \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2g_0} \right] + \sin^2 x_2 = \underline{x_1 \cos^2 x_2 \frac{g_0'}{2g_0}};$$

$$K_{44} = -\frac{\partial}{\partial x_4} \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 41 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 41 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 13 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 14 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \right],$$

$$K_{44} = \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2} - \frac{g_0'^2}{4g_0} - \frac{g_0'^2}{4g_0} + \frac{1}{2} g_0' \left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{g_0'}{2g_0} \right],$$

$$K_{44} = \underline{\frac{g_0'}{x_1} - \frac{g_0'^2}{4g_0} + \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2}}.$$

Daraus berechnet sich die Gesamtkrümmung

$$\mathfrak{R} = g^{11} K_{11} + g^{22} K_{22} + g^{33} K_{33} + g^{44} K_{44},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \frac{g_0'^2}{4g_0^2} + \frac{1}{x_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \frac{1}{x_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \frac{1}{x_1} \frac{g_0'}{g_0} - \frac{g_0'^2}{4g_0^2} + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{2g_0'}{x_1 \cdot g_0} + \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2g_0} + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx_1} \frac{g_0'}{2}.$$

1) Vgl. Anmerkung auf vorhergehender Seite.

Durch Umformung erhält man hieraus:

$$(36) \quad \Re = \frac{1}{2g_0' x_1^4} \frac{d}{dx_1} \left(\frac{x_1^4 g_0'^2}{g_0} \right) = \frac{2}{x_1^2 \sqrt{g_0}} \frac{d}{dx_1} \left(x_1^{-2} \frac{d \sqrt{g_0}}{dx_1} \right).$$

Setzt man hierin

$$g_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2},$$

so erhält man Gleichung (34). Soll nun die Riemannsche Krümmung außerhalb der Elektronen verschwinden, so muß

$$(37) \quad \begin{aligned} x_1^{-2} \frac{d \sqrt{g_0}}{dx_1} &= c_1, \\ \sqrt{g_0} &= c_2 - \frac{c_1}{x_1}, \\ g_0 &= \left(c_2 - \frac{c_1}{x_1} \right)^2 \end{aligned}$$

sein. In der Primäröhre war

$$(38) \quad g_0 = \frac{1}{k_0^2} \left(1 + \frac{x_1^2}{\varrho^2} \right) = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}.$$

Die Konstanten c_1 , c_2 und k_0 lassen sich daraus bestimmen, daß erstens g_0 im Unendlichen gleich 1 wird und zweitens in der Grenzkugel, also für $x_1 = a$, sowohl

$$\sqrt{g_0} \quad \text{als} \quad \frac{d \sqrt{g_0}}{dx_1}$$

stetige Funktionen sind. Aus der ersten Festsetzung folgt:

$$(39 \text{ a}) \quad c_2 = 1,$$

aus der zweiten die Gleichungen:

$$1 - \frac{c_1}{a} = \frac{1}{k_0} \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{a^2} = \frac{a}{k_0 \varrho^2 \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}},$$

d. h.

$$(39 \text{ b}) \quad c_1 = \frac{a^3}{\varrho^2 + 2a^2},$$

$$(39 \text{ c}) \quad k_0 = \frac{1 + \frac{2a^2}{\varrho^2}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}}.$$

Die Größe $\sqrt{g_0}$, die nach (37) und (38) zu bestimmen ist, stellt die veränderliche Lichtgeschwindigkeit dar. Sie erreicht in der Unendlichkeit den größten Wert 1 und nimmt im

Mittelpunkt des Elektrons ihren kleinsten Wert an. Durch Anhäufung vieler Elektronen kann die Lichtgeschwindigkeit merklich verändert und der Lichtstrahl daher gekrümmt werden, wie es die Einsteinsche Theorie verlangt. Dies erkennt man am besten, wenn man die Gravitation betrachtet, deren Potential durch die Größe $\sqrt{g_0}$ bestimmt wird.

2. Abschnitt. Die anziehende Wirkung der Gravitation.

Um die anziehende Wirkung der Gravitation zu erklären, braucht man nur daran zu denken, daß in dem verzerrten System das Einheitsmaß in zeitlicher Richtung sich im Verhältnis der Größe $1/\sqrt{g_0}$ ändert. Die Isogonen einer zusammenhängenden Primärröhre können daher nicht mehr geradlinig bleiben, sondern müssen eine Krümmung erleiden, die der Änderung dieser Funktion entspricht. Daraus aber wird sich die Gleichung (67) in Einsteins Arbeit¹⁾ ebenfalls ergeben, so daß sich die Einführung geodätischer Linien erübrigt.

Am einfachsten ist die Krümmung der Isogonen zu behandeln, die den x_0 -Linien des Feldes parallel laufen, da ihr Krümmungsradius σ selbstverständlich in die Richtung des Gradienten der Funktion $1/\sqrt{g_0}$ fällt, deren skalare Natur, wie alsbald nachgewiesen werden soll, aus der der Krümmung \mathfrak{R} hervorgeht. Für diese Isogonen ist wie für ebene Kurven:

$$\sigma : \sigma + d\sigma = \frac{1}{\sqrt{g_0}} : \frac{1}{\sqrt{g_0}} + d\frac{1}{\sqrt{g_0}},$$

also

$$(40) \quad \frac{1}{\sigma} = - \frac{\partial \lg \frac{1}{\sqrt{g_0}}}{\partial \sigma} = - \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma}.$$

Sind die Isogonen irgendwie anders gerichtet, so fällt doch ihr Krümmungsradius wenigstens in die Ebene, die von dem Gradienten und der x_0 -Linie gebildet wird. In diesem allgemeineren Falle ist es möglich, daß die Isogone auch in diese Ebene fällt; dann soll die Krümmung longitudinal heißen. Steht die Isogone dagegen auf dem Gradienten senkrecht, so heißt die Krümmung transversal. Für die longitudinale Krümmung läßt sich obige Formel (40) ohne weiteres

1) l. c. p. 817.

auch anwenden, da $\lg g_0$ ein Skalar ist. Wenn dagegen die Isogone nicht in die $x_0 \sigma$ -Ebene hineinfällt, so ist das Problem der Krümmung nicht mehr zwei-, sondern dreidimensional, und es muß, da offenbar eine zur $x_0 \sigma$ -Ebene senkrechte Linie überhaupt nicht mehr gekrümmt wird, in Formel (40) auf der rechten Seite der Faktor $\cos^2 \psi$ hinzugefügt werden, wobei ψ der Winkel zwischen der Isogone und der $x_0 \sigma$ -Ebene ist.

$$(40a) \quad \frac{1}{\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} \cos^2 \psi.$$

Es ist nämlich allgemein

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} \cos^2 \psi + \frac{1}{\sigma_2} \sin^2 \psi,$$

worin $1/\sigma_1$ die longitudinale Krümmung nach Gleichung (40), $1/\sigma_2$ aber die Krümmung der Senkrechten auf der $x_0 \sigma$ -Ebene angibt.

Nun bedeute x_r irgendeine räumliche, d. h. zu x_0 senkrechte Richtung; dann ist die Krümmung einer Raumkurve durch die Gleichung:

$$\frac{\cos(x_r \sigma)}{\sigma} = -\frac{d^2 s_r}{ds^2}$$

gegeben. Hierin ist ds_r das zu x_r gehörige Längendifferential, ds das der Isogone, und das Minuszeichen ist gesetzt, weil der Krümmungsradius vom Mittelpunkt aus gerechnet werden sollte. Setzt man dies in (40a) ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 s_r}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} \cos(x_r \sigma) \cos^2 \psi.$$

Gibt nun r die Richtung des Gradienten an, so kann

$$\frac{\partial \lg g_0}{\partial \sigma} = \frac{\partial \lg g_0}{\partial r} \cos(r \sigma)$$

gesetzt werden, da die Differentialquotienten in allen zu r senkrechten Richtungen verschwinden. Also wird:

$$\frac{d^2 s_r}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial r} \cos(r \sigma) \cos(x_r \sigma) \cos^2 \psi.$$

Ferner ist

$$\cos(x_r \sigma) = \cos(r \sigma) \cos(r x_r) + \cos(x_0 \sigma) \cos(x_0 x_r)$$

$$\text{und } (r \sigma) = \frac{\pi}{2} - (x_0 \sigma),$$

da σ in der $x_0 r$ -Ebene liegt. Ebenso ist

$$0 = \cos(s\sigma) = \cos(r\sigma)\cos(rs) + \cos(x_0\sigma)\cos(x_0s),$$

$$\text{d. h. } \operatorname{tg}(r\sigma) = -\frac{\cos(rs)}{\cos(x_0s)}, \quad \frac{1}{\cos^2(r\sigma)} = 1 + \frac{\cos^2(rs)}{\cos^2(x_0s)}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man:

$$\frac{d^2 s_\tau}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial r} [\cos^2(r\sigma)\cos(rx_\tau) + \cos(r\sigma)\cos(x_0x_\tau) \cos(x_0\sigma)] \cos^2 \psi.$$

Nun ist $\cos(x_0x_\tau) = 0$, da x_τ senkrecht auf x_0 steht.

$$\frac{d^2 s_\tau}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial r} \cos^2(r\sigma) \cos(rx_\tau) \cos^2 \psi.$$

Es kann

$$\frac{\partial \lg g_0}{\partial r} \cos(rx_\tau) = \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau}$$

gesetzt werden, während

$$\frac{1}{\cos^2(r\sigma)} = 1 + \frac{\cos^2(rs)}{\cos^2(x_0s)} = 1 + \frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2} = \frac{\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2}$$

und

$$\cos^2 \psi = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2,$$

also

$$\cos^2(r\sigma) \cos^2 \psi = \left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2$$

ist. So wird

$$\frac{d^2 s_\tau}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau} \left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2.$$

Ferner ist

$$\left(\frac{ds_0}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2,$$

und in den zu x_0 senkrechten, also unverzerrten Richtungen kann $ds_\tau = dx_\tau$ gesetzt werden; daher erhält man schließlich:

$$(40b) \quad \frac{\frac{d^2 x_\tau}{ds^2}}{1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau}.$$

Für die Ruhbeschleunigung fällt ds mit $ds_0 = i\sqrt{g_0} dt$ zusammen, und es ist dann, da der Nenner gleich 1 wird,

$$(40c) \quad \frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2} g_0 \frac{\partial \lg g_0}{\partial x_\tau},$$

genau die Einsteinsche Gleichung (67)¹⁾, da sein g_{44} mit g_0 übereinstimmt. Aber nicht $\frac{1}{2}g_0$, sondern $\frac{1}{2}\lg g_0$ ist als Gravitationspotential anzusehen. Da die skalare Natur dieser Größe nachgewiesen werden kann, ist der Gravitationsvektor der Gradient dieses Skalars und daher, wie Mie²⁾ angenommen, ein Vierervektor. Er steht auf dem Grenzraum der die Gravitation erzeugenden Primäröhre senkrecht.

Aus Gleichung (40b) kann in bekannter Weise die Bewegung eines Körpers um einen anziehenden Mittelpunkt hergeleitet werden; aus ihr ergeben sich die beiden folgenden nach Einführung ebener Polarkoordinaten:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = \text{const.}$$

$$(41) \quad -\frac{1}{2} \lg \left[1 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] = -\frac{1}{2} \lg B + \frac{1}{2} \lg g_0,$$

$$(42) \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{2}{c} A i}{c}.$$

A und B sind Integrationskonstanten, c ist die normale Lichtgeschwindigkeit.³⁾ Ferner ist für das Feld eines Elektrons nach (37):

$$g_0 = \left(c - \frac{e_1}{r} \right)^2,$$

also für das Feld sehr vieler in einer kugelförmigen Masse vereinigten Elektronen

$$g_0 = \left(c - \frac{b}{cr} \right)^2,$$

worin b eine von der Gesamtmasse dieser Elektronen abhängige Konstante ist. Aus Gleichung (41) folgt:

$$(43) \quad 1 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{B}{g_0} = \frac{B c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r} \right)^2}.$$

Aus (42) ergibt sich:

$$\frac{1}{ds} = \frac{2Ai}{cr^2} \cdot \frac{1}{d\varphi}.$$

1) l. c. p. 817.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. 40. p. 26. 1913.

3) Es ist für dieses Problem zweckmäßiger, diese nicht gleich 1 zu setzen, da sich sonst die Konstanten nicht in den gebräuchlichen Maßen ergeben.

Dieser Wert soll in (43) eingesetzt werden.

$$1 + \frac{4 A^2}{c^2 r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{4 A^2}{c^2 r^2} = \frac{B c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2 r} \right)^2}$$

und für $1/r = k$:

$$(44) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{4 A^2}{c^2} \left(\frac{dk}{d\varphi} \right)^2 + \frac{4 A^2}{c^2} k^2 &= \frac{B c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2} k \right)^2}, \\ \left(\frac{dk}{d\varphi} \right)^2 + k^2 &= -\frac{c^2}{4 A^2} \left[1 - \frac{B c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2} k \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, ersetze ich

$$\frac{B c^{-2}}{\left(1 - \frac{b}{c^2} k \right)^2} \text{ durch } B c^{-2} \left(1 + \frac{2b}{c^2} k + \frac{3b^2}{c^4} k^2 \right),$$

vernachlässige also höhere Potenzen von $b k / c^2$ als die zweite. Dann ist bekanntlich

$$k = \frac{1 + \varepsilon \cos \lambda \varphi}{p}, \quad \frac{dk}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \lambda}{p} \sin \lambda \varphi,$$

d. h. die Bahn ist eine Ellipse mit Perihelbewegung, die wegen $\lambda < 1$ vorschreitet. Man erhält nämlich in (44) durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 \lambda \varphi) \frac{\varepsilon^2 \dot{\lambda}^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4} \right) \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2\varepsilon}{p^2} \cos \lambda \varphi + \frac{\varepsilon^2}{p^2} \cos^2 \lambda \varphi \right) \\ - \frac{2Bb}{4A^2 c^2} \left(\frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos \lambda \varphi \right) + \left(1 - \frac{B}{c^2} \right) \frac{c^2}{4A^2} = 0. \end{aligned}$$

Dann wird

$$\text{der Koeffizient von } \cos^2 \lambda \varphi : \frac{-\varepsilon^2 \dot{\lambda}^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4} \right) \frac{\varepsilon^2}{p^2},$$

$$\text{der Koeffizient von } \cos \lambda \varphi : \frac{2\varepsilon}{p^2} \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4} \right) - \frac{2Bb}{4A^2 c^2} \frac{\varepsilon}{p},$$

$$\text{das Absolutglied: } \frac{\varepsilon^2 \dot{\lambda}^2}{p^2} + \left(1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4} \right) \frac{1}{p^2} - \frac{2Bb}{4A^2 c^2} \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{B}{c^2} \right) \frac{c^2}{4A^2}.$$

Durch Nullsetzen dieser Größen erhält man:

$$(45) \quad \dot{\lambda}^2 = 1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4},$$

$$(46) \quad \frac{Bb p}{4A^2 c^2} = 1 - \frac{3Bb^2}{4A^2 c^4},$$

$$\left(1 - \frac{B}{c^2} \right) \frac{c^2}{4A^2} = -\frac{\varepsilon^2}{p^2} \dot{\lambda}^2 - \frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{2\lambda^2}{p^2} = \frac{\lambda^2}{p^2} (1 - \varepsilon^2),$$

d. h.

$$(47) \quad \frac{B}{c^2} = 1 - \frac{\lambda^2(1-\varepsilon^2) \cdot 4 A^2}{c^4 p^2}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich wegen des großen Wertes von c :

$$\frac{B}{c^2} \sim 1.$$

Dann aber liefert (46) aus demselben Grunde:

$$b \sim \frac{4 A^2}{p},$$

und setzt man diese Werte in (45) ein, so bekommt man:

$$\lambda^2 = 1 - \frac{12 A^2}{p^2 c^2}$$

und

$$(48) \quad \lambda = 1 - \frac{6 A^2}{p^2 c^2} < 1.$$

Nun war

$$(42) \quad \frac{2 A i}{c} = r^2 \frac{d \varphi}{ds},$$

ferner

$$ds^2 = g_0 d x_0^2 + d r^2 + r^2 d \varphi^2$$

$$ds^2 = -g_0 d t^2 + d r^2 + r^2 d \varphi^2$$

$$ds = -i \sqrt{g_0} dt \sqrt{1 - \frac{1}{g_0} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right]}.$$

$\sqrt{g_0}$, die veränderliche Lichtgeschwindigkeit, kommt ihrem Normalwert c so nahe, daß

$$ds = -i c dt$$

gesetzt werden kann, und so erhält man aus (42):

$$2 A = r^2 \frac{d \varphi}{dt},$$

d. h. A ist die Flächengeschwindigkeit.

Bei einer geschlossenen Bahn ist, wenn T die Umlaufszeit und a die Halbachse der Ellipse ist (ε ist die numerische Exzentrizität):

$$(49) \quad A T = \pi a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Ferner ist der Halbparameter der Ellipse:

$$(50) \quad p = a (1 - \varepsilon^2).$$

Führt man diese Werte in (48) ein, so erhält man:

$$(51) \quad \lambda = 1 - \frac{6 \pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - s^2)} .$$

Nun schreitet das Perihel bei jedem Umlauf vor um

$$(52) \quad \psi = \frac{2 \pi}{\lambda} - 2 \pi ,$$

also um

$$(52) \quad \psi = \frac{12 \pi^2 a^2}{c^2 T^2 (1 - s^2)} .$$

Durch diese Perihelwanderung unterscheidet sich also die Bahn eines um ein Anziehungszenrum sich bewegenden Körpers von der klassischen Theorie.

Es erübrigt sich noch, den Begriff der schweren Masse und ihre Dichte zu definieren. Um dabei den Anschluß an die klassische Mechanik zu wahren, ist die Poissonsche Gleichung

$$(53) \quad \Delta \mathfrak{U} = 4 \pi \mathbf{x} \mathbf{d}$$

als Ausgangspunkt zu wählen, in der \mathfrak{U} das Gravitationspotential, \mathbf{x} die Gravitationskonstante und \mathbf{d} die Massendichte bedeuten. Für den Fall eines einzigen Elektrons ist

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \lg g_0$$

bekannt; es muß aber noch der für ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem geltende Differentialoperator Δ unserem allgemeineren System mit 4 Ausdehnungen angepaßt werden. Bekanntlich kann er durch die beiden aufeinanderfolgenden Operatoren Grad und Div ersetzt werden, die für beliebig viel Dimensionen definiert sind, so daß also, da der Gradient des Potentials der Gravitationsvektor ist, die mit $4\pi\mathbf{x}$ multiplizierte Massendichte als dessen Divergenz auftritt. Nun sind aber die Operatoren von Grad und Div in einem allgemeineren System anders zu definieren als im kartesischen; die allgemeinen Formeln hat Einstein¹⁾ angegeben. Ich möchte aber für orthogonale Systeme lieber eine andere Form vorziehen, indem ich nicht die ko- und kontravarianten Tensorkomponenten A_μ , $A_{\mu\nu}$ usw. Einsteins, sondern die Projektionen auf die Parameterlinien- und -Flächen einführe. Dabei will ich Skalare stets mit deutschen, Vierervektoren stets

1) I. c. die Gleichungen (35), (36) und (40) des § 11.

mit kleinen lateinischen oder griechischen, und Sechservektoren mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnen. Zwischen den Projektionen λ_μ und $M_{\mu\nu}$, und den Tensorkomponenten A_μ und $A_{\mu\nu}$, bestehen dann die Beziehungen:

$$(54) \quad \sqrt{g_\mu} \lambda_\mu = A_\mu,$$

$$(55) \quad \sqrt{g_\mu} M_{\mu\nu} \sqrt{g_\nu} = A_{\mu\nu}.$$

Die von mir angewendete Bezeichnungsweise ist zwar nur für orthogonale Systeme anwendbar, hat aber dann den Vorzug, bei Transformationen der Gestalt $x_i = f_i(\xi_i)$, die die Form des Systems nicht beeinflussen, die Komponenten λ_μ und $M_{\mu\nu}$ unverändert zu lassen, was für die der kovarianten Tensoren nicht zutrifft. Rechnet man nun für diese Projektionen die in einem kartesischen System geltenden Gleichungen:

$$(56) \quad \begin{cases} \text{Div } b = a, \\ \text{Rot } f = M, \\ \text{Div } M = l \end{cases}$$

um, so erhält man folgende Beziehungen¹⁾:

$$(57) \quad \begin{cases} \text{Div } \frac{\beta}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{G} = a \cdot \sqrt{G}, \\ \text{Rot } \sqrt{g} \cdot \varphi = \sqrt{g} \cdot M \cdot \sqrt{g}, \\ \text{Div } \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot M \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \lambda \cdot \sqrt{G}. \end{cases}$$

Hierin ist jede Komponente eines Vierervektors β oder φ oder λ mit der entsprechenden des Fundamentaltensors \sqrt{g} oder $1/\sqrt{g}$ multipliziert, desgleichen jede Komponente des Sechservektors M mit den beiden entsprechenden von \sqrt{g} oder $1/\sqrt{g}$. Die Determinante $\sqrt{g_0 g_1 g_2 g_3}$ ist mit \sqrt{G} bezeichnet. Die Gleichungen (57) stimmen mit den Einsteinschen überein, wenn man die Formeln (54) und (55) berücksichtigt.

Um also die Massendichte b zu bestimmen, ist in Gleichung (57a) der Vierervektor β gleich dem der Gravitation, d. h. gleich dem Gradienten der Funktion $\frac{1}{2} \lg g_0$ zu setzen:

$$(58) \quad \text{Div } \sqrt{G} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \text{Grad } \frac{1}{2} \lg g_0 = 4\pi \times b \sqrt{G}.$$

1) Die Schreibweise entspricht der Matrizenrechnung (vgl. z. B. H. Minkowski, Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge, Math. Annal. 68, § 11, p. 495f.).

Im räumlichen Polarkoordinatensystem verschwinden alle Differentialquotienten mit Ausnahme derer nach x_1 oder r ; man erhält also:

$$(59) \quad \frac{d}{dr} \sqrt{g_0} r^2 \cos x_2 \frac{d}{dr} \frac{1}{2} \lg g_0 = 4\pi \times b \cdot r^2 \cos x_2 \sqrt{g_0},$$

$$b = \frac{1}{4\pi \times r^2 \sqrt{g_0}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \sqrt{g_0}}{dr} \right).$$

Nun war nach (36):

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{r^2 \sqrt{g_0}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \sqrt{g_0}}{dr} \right).$$

Es ist also die Massendichte:

$$(60) \quad b = \frac{\mathfrak{R}}{8\pi}.$$

Damit ist auch der Beweis für die skalare Natur des Gravitationspotentials $\frac{1}{2} \lg g_0$ gegeben, da die Krümmung \mathfrak{R} , die — abgesehen von der Konstanten $8\pi \times$ — als Divergenz seines Gradienten sich ergibt, natürlich skalar ist.

Die Krümmung \mathfrak{R} und damit die Massendichte b verschwindet überall im Sekundärgebiet; in der Primärröhre ist sie zwar nicht konstant, sondern nach (84):

$$\mathfrak{R} = \frac{6\rho^2 + 4r^2}{(\rho^2 + r^2)^2}.$$

Da aber r gegen ρ verschwindend klein ist, wie wir als-bald bestätigt sehen werden, hat die Krümmung \mathfrak{R} überall mit großer Annäherung den Wert wie im Mittelpunkt, d. h. $6/\rho^2$.

Um die gesamte schwere Masse eines Elektrons zu finden, muß die Dichte b über den räumlichen Querschnitt der Primärröhre integriert werden. Also ist die Ruhmasse:

$$(61) \quad m = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \frac{6}{\rho^2} \cdot \frac{1}{8\pi \times},$$

$$m = \frac{a^3}{\times \rho^2}.$$

Um Übereinstimmung mit dem Werte der tragen Masse [vgl. Gleichung (25)] zu erzielen, ist die Gravitationskonstante

$$(62) \quad \times = \frac{1}{8\pi^2 a^3}$$

zu setzen.

Aus Gleichung (40c) folgt nun, wenn x_r mit r zusammenfällt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{dg_0}{dr},$$

und wenn die Beschleunigung mit β bezeichnet wird, ergibt sich für die Schwerbeschleunigung im Felde eines Elektrons:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{a^3}{r(\rho^3 + 2a^3)} \right)^2,$$

also bei Vernachlässigung höherer Potenzen von a^3/ρ^3 :

$$\beta_{II} = -\frac{a_1^3}{\rho_1^3 r_1^2},$$

wenn wieder die Indizes I und II das anziehende von dem angezogenen Elektron unterscheiden. Durch Multiplikation mit der tragen Masse

$$m_{II} = \frac{8\pi^3 a_{II}^5}{\rho_{II}^3}$$

erhält man:

$$(63) \quad m_{II} \beta_{II} = -\frac{1}{8\pi^3 a_1^3} \cdot \frac{8\pi^3 a_1^5}{\rho_1^3} \cdot \frac{8\pi^3 a_{II}^5}{\rho_{II}^3} \cdot \frac{1}{r^3},$$

$$m_{II} \beta_{II} = -\alpha \frac{m_1 m_{II}}{r^3},$$

das Newtonsche Gesetz. Der Wert der Gravitationskonstanten ist durch Gleichung (62) mit dem Radius des Elektrons in Beziehung gesetzt, und man muß daher annehmen, daß die Radien sämtlicher Elektronen, auch die der bis jetzt unbekannten positiven, einander gleich sind.

Für ein negatives Elektron läßt sich a aus

$$(27) \quad a = \frac{e^2}{2m} = \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{m}$$

berechnen. Ich benutze dazu die Werte:

$$\frac{e}{m} = 1,73 \cdot 10^{-7} \text{ g}^{-1/2} \text{ cm}^{1/2}, \quad e = 1,56 \cdot 10^{-20} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2},$$

und erhalte:

$$(64) \quad a = 1,85 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Nun ist die Gravitationskonstante

$$\alpha = 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$$

gegeben. Man erhält also in Gleichung (62) verschiedene Benennungen und kann daher diese aufeinander zurückführen.

Benutzt man noch Minkowskis Gleichung

$$1 \text{ sec} = 3 \cdot 10^{10} i \text{ cm},$$

so erhält man:

$$x = 6,68 \cdot 10^{-8} g^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2} = - \frac{1}{8 \cdot (1,35\pi \cdot 10^{-15})^2 \text{ cm}^2},$$

$$1 \text{ g} = - 8 \cdot (1,35\pi \cdot 10^{-15})^2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^5 \text{ sec}^{-2},$$

$$1 \text{ g} = + 8 \cdot (0,45\pi \cdot 10^{-23})^2 \cdot 6,68 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3,$$

$$(65) \quad 1 \text{ g} = 1,07 \cdot 10^{-32} \text{ cm}^3.$$

Damit sind sämtliche physikalische Größen auf eine Einheit, das cm, zurückgeführt. In diesem Maße ergibt sich für die Gravitationskonstante:

$$x = - \frac{1}{8 \cdot (1,35 \cdot 10^{-15})^2} \text{ cm}^{-2},$$

$$(66) \quad x = - 0,686 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-2}.$$

Die Masse eines Elektrons wird:

$$(67) \quad m_e = 0,9 \cdot 10^{-27} \text{ g} = 0,963 \cdot 10^{-79} \text{ cm}^3.$$

Die Ladung eines Elektrons erhält man zu:

$$(68) \quad e_e = - 1,56 \cdot 10^{-20} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{1/2} = - 1,61 \cdot 10^{-46} \text{ cm}^2.$$

Hieraus kann man den Krümmungsradius ϱ des negativen Elektrons berechnen. Es war:

$$(17) \quad e = \frac{4\pi a^3}{\varrho},$$

also

$$\varrho = \frac{4\pi a^3}{e} = - \frac{4\pi \cdot 1,35^3 \cdot 10^{-39}}{1,61 \cdot 10^{-46}} \text{ cm},$$

$$(69) \quad \varrho = - 1,91 \cdot 10^8 \text{ cm}.$$

Dieser Wert ist mehr als tausend Trillionen mal größer als der Radius a .¹⁾

3. Abschnitt. Der Einfluß der Gravitation auf die elektrischen Fundamentalgrößen.

Wendet man die Gleichungen (56b, c) und (57b, c) auf die elektrischen Größen: Dichte, Feldstärke und Potential

1) Es ist interessant, daß H. Reißner in seiner Arbeit: Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes, Ann. d. Phys. 50, p. 115—117. 1900, fast dasselbe Verhältnis für seine Konstanten λ und a errechnet ($\lambda : a = 3 \cdot 10^{31}$).

an, die ich im verzerrten System mit δ , M und χ bezeichnen will, so wird

$$(57b) \quad \frac{d\sqrt{g_0}\chi_0}{dr} = -\sqrt{g_0}M_{01}\sqrt{g_1},$$

und

$$(57c) \quad \frac{d\sqrt{g_1 g_2 g_3} M_{01}}{dr} = \sqrt{g_1 g_2 g_3} \delta_0,$$

während alle anderen Komponenten von χ , M und δ verschwinden. Im Sekundärgebiet ist $\delta_0 = 0$, in der Primäröhre $= 3/\varrho^1$ zu setzen, um an der Bedingung festzuhalten, daß der $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ -Raum überall die gleiche mittlere Krümmung hat.

Da nun in (57c) die Verzerrung, die durch die Größe g_0 gegeben ist, nicht auftritt, erhält man auch die Feldstärke M_{01} wie im unverzerrten Systeme, also außen

$$-\frac{i a^3}{\varrho r^2}$$

[Gleichung (21)], innen

$$-\frac{i r}{\varrho}$$

[Gleichung (14)]; wieder ist aber daran zu erinnern, daß die Komponenten des kovarianten Tensors wegen Gleichung (55) davon abweichen.

Dagegen wird, da g_0 in (57b) auftritt, das Potential geändert. Außen erhält man

$$\frac{d\sqrt{g_0}\chi_0}{dr} = +\frac{i a^3}{\varrho r^2} \sqrt{g_0}$$

mit

$$\sqrt{g_0} = 1 - \frac{a^3}{(\varrho^2 + 2a^2)r},$$

also

$$(70) \quad \sqrt{g_0}\chi_0 = -\frac{i a^3}{\varrho r} + \frac{i a^6}{2\varrho r^3(\varrho^2 + 2a^2)}.$$

Diese Gleichung kann auch ersetzt werden durch

$$(70a) \quad \sqrt{g_0}\chi_0 = +\frac{i \varrho}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{\varrho^2}\right) (g_0 - 1).$$

Für $r = a$ war

$$\sqrt{g_0} = \frac{\varrho^2 + a^2}{\varrho^2 + 2a^2}.$$

1) Infolgedessen bleibt auch die Gesamtladung eines Elektrons unverändert $\frac{4\pi a^2}{\varrho}$.

Also erhält man für $r = a$:

$$(71) \quad \chi_0 = -\frac{i a^3 (2 \varrho^3 + 3 a^3)}{2 \varrho (\varrho^2 + a^2)}.$$

Im Innern liefert (57 b) dagegen:

$$\begin{aligned} \frac{d \sqrt{g_0} \chi_0}{dr} &= + i \frac{\cos \vartheta}{k_0} \frac{r}{\varrho} = i \frac{\sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}}{\left(1 + \frac{2 a^2}{\varrho^2}\right) \varrho} r \sqrt{1 + \frac{r^2}{\varrho^2}}, \\ \sqrt{g_0} \chi_0 &= \frac{i \varrho \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}}{3 \left(1 + \frac{2 a^2}{\varrho^2}\right)} \sqrt{1 + \frac{r^2}{\varrho^2}} + C. \end{aligned}$$

Die Konstante C ist so zu bestimmen, daß für $r = a$ wieder der Wert von χ_0 in (71) herauskommt:

$$C = -\frac{i (2 \varrho^4 + 10 a^2 \varrho^2 + 11 a^4)}{6 \varrho (\varrho^2 + 2 a^2)}.$$

Danach wird:

$$(72) \quad \sqrt{g_0} \chi_0 = \frac{i \varrho \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varrho^2}}}{3 \varrho (\varrho^2 + 2 a^2)} \sqrt{\varrho^2 + r^2} - \frac{i (2 \varrho^4 + 10 a^2 \varrho^2 + 11 a^4)}{6 \varrho (\varrho^2 + 2 a^2)}.$$

Hieraus erhält man für den Mittelpunkt, da

$$\sqrt{g_0} = \frac{1}{k_0} = \frac{\varrho \sqrt{a^2 + \varrho^2}}{\varrho^2 + 2 a^2}$$

für $r = 0$ ist:

$$(73) \quad \chi_0 = \frac{i \varrho}{3} - \frac{i (2 \varrho^4 + 10 a^2 \varrho^2 + 11 a^4)}{6 \varrho^3 \sqrt{a^2 + \varrho^2}} = -i \cdot \frac{3}{2} \frac{a^2}{\varrho} - i \cdot \frac{9}{8} \frac{a^4}{\varrho^3} \dots$$

Die Werte des elektrostatischen Potentials φ erhält man aus χ_0 wieder durch Division durch $-i$. Man kann der Gleichung (72) auch die Gestalt geben:

$$(74) \quad \sqrt{g_0} \chi_0 = \frac{i (\varrho^2 + 2 a^2)^2}{3 \varrho (\varrho^2 + a^2)} \left(\sqrt{g_0}^3 - 1 \right) - \frac{i a^4 (8 \varrho^2 - 5 a^2)}{6 \varrho (\varrho^2 + 2 a^2) (\varrho^2 + a^2)}.$$

Das Produkt $\sqrt{g_0} \chi_0$ stellt die Komponente des kovarianten Vierervektors dar.

4. Abschnitt. Die Gesamtwirkung aller Elektronen und die Weltfunktion.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen für das elektrische und das Gravitationsfeld eines einzelnen Elektrons

ist es nun leicht, das gesamte Weltbild zu konstruieren. Alles physikalische Geschehen spielt sich in der vierdimensionalen Raumzeitmannigfaltigkeit ab; diese zerfällt in die Primär-röhren der positiven und negativen Elektronen, die sämtlich in dem Radius a und wahrscheinlich auch im Absolutwert von ϱ übereinstimmen, und in das krümmungsfreie Sekundärgebiet des Äthers. Die elektrischen Wirkungen der positiven und negativen Primär-röhren sind einander entgegengesetzt, weil der elektromagnetische Vektor von der ersten Potenz von ϱ abhängt; dagegen addieren sich die Gravitationswirkungen beider Arten, in die nur das Quadrat von ϱ eingeht. Bei keiner Wirkung wird aber eine Änderung der Riemannschen Krümmung \mathfrak{K} oder der mittleren Krümmung des auf den Isogonen oder Weltlinien senkrechten Spannungsraumes erzielt, die die Massendichte bzw. die elektrische Dichte angeben. Für den Äther verschwinden beide; für die Primär-röhre ist \mathfrak{K} mit großer Genauigkeit

$$\frac{6}{\varrho^2} \left(\text{genau } \frac{6\varrho^2 + 4r^2}{(\varrho^2 + r^2)^2} \right),$$

die elektrische Ruhdichte $\pm 3/\varrho$.

Aus \mathfrak{K} ist dann in einem allgemeinen Koordinatensystem, dessen Bogendifferential durch

$$(75) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu {}^1)$$

gegeben ist, ein zweiter Skalar, die Lichtgeschwindigkeit l , gemäß folgender Gleichung zu bestimmen:

$$(76) \quad \text{Div Grad } \lg l = \frac{\mathfrak{K}}{2},$$

die die Verallgemeinerung der Gleichung (36) darstellt. Dabei müssen die $g_{\mu\nu}$ mit ihren Ableitungen der Bedingung genügen, daß sich aus ihnen der an der betreffenden Raumzeitstelle herrschende Wert von \mathfrak{K} , d. h. entweder 0 oder

$$\frac{6\varrho^2 + 4r^2}{(\varrho^2 + r^2)^2}$$

ergibt. Ferner ist die nähere Bestimmung von l so zu treffen, daß diese Größe für ein einzelnes Elektron in $\sqrt{g_0}$ übergeht.

1) Ich schließe mich auch hier wieder der abkürzenden Schreibweise Einsteins an und verwende natürlich jetzt allgemein ko- und kontravariante Tensoren.

Man kann in Gleichung (76) die Differentialoperatoren ersetzen:

$$(77) \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} = \frac{g}{2} \cdot {}^1)$$

Die Komponenten d_μ der elektrischen Dichte erfüllen die Gleichung

$$(78) \quad g^{\mu\nu} d_\mu d_\nu = \frac{g}{q^2}$$

im Innern der Primärröhren und verschwinden im Sekundärgebiet sämtlich. Der elektromagnetische Sechervektor $M_{\mu\nu}$ ist gegeben durch

$$(79) \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sqrt{G} g^{\mu a} g^{v\beta} M_{\mu v} = d^a = g^{a\sigma} d_\sigma \cdot {}^2)$$

das elektrische Vierpotential durch:

$$(80) \quad \text{Rot}_{\mu\nu} q = \frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} = M_{\mu\nu} \cdot {}^3)$$

Das Gravitationspotential ist $\lg I$, sein Gradient der Gravitationsvektor.

Um nun die Weltfunktion \mathfrak{H} zu bestimmen, die die beiden Hilbertschen Axiome I und II ⁴⁾ erfüllt, suche ich für den Fall der Ruhe die Energiedichte zu bilden. Diese zerfällt in einen Teil, der sich auf die Gravitation bezieht, und einen elektromagnetischen. Jeder Teil besteht wieder aus zwei Summanden, einem potentiellen, der das Produkt der betreffenden Dichte mit dem Potential ist, und einem kinetischen, der das Quadrat des Feldvektors enthält. Für die Gravitation ist

$$(81) \quad \mathfrak{H}_1 = \frac{1}{8\pi z} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} \cdot g^{\mu\nu} \cdot l_\mu,$$

worin

$$(81 \text{a}) \quad l_\mu = \frac{\partial \lg^2 I}{\partial x_\mu}$$

sein soll, offenbar eine Invariante, da l_μ kovariant und $g^{\mu\nu} l_\mu$ kontravariant, beide vom 1. Range sind. Dasselbe gilt für den elektromagnetischen Teil:

1) Vgl. (58) und (60) und Einstein I. c. p. 797, Gleichung (35).

2) Vgl. 57a und Einstein I. c. p. 798, Gleichung (40).

3) Vgl. 57b und Einstein I. c. p. 797. Gleichung (36).

4) I. c. p. 396.

$$(82) \quad \mathfrak{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sqrt{G} g^{\nu\beta} p_\nu$$

mit

$$(82a) \quad p_\nu = g^{\mu a} q_a M_{\mu\nu};$$

denn $q_a M_{\mu\nu}$ ist ein kovarianter Tensor 3. Ranges, aus dem durch Multiplikation mit $g^{\sigma\alpha}$ ein gemischter Tensor entsteht, der durch zweimalige „Verjüngung.“¹⁾, d. h. durch Einsetzung von μ für ϱ und α für σ in einen kovarianten Tensor p_ν 1. Ranges übergeht.

Das Integral über ein beliebiges Stück $d\omega$ der vierfach ausgedehnten Raumzeitmannigfaltigkeit

$$\iiint (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2) \sqrt{G} d\omega$$

kann nach teilweiser Integration durch ein ebensolches über die dreidimensionale Oberfläche dV von $d\omega$ ersetzt werden:

$$(83) \quad \iiint (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2) \sqrt{G} d\omega = \iiint \sqrt{G} (g^{\mu\nu} l_\mu + g^{\nu\beta} p_\nu)_n dV,$$

worin der Index n andeutet, daß die Komponenten der kontravarianten Vektoren l und p in der Richtung der Normalen auf diese Oberfläche zu nehmen sind:

$$(83a) \quad \iiint (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2) \sqrt{G} d\omega = \iiint \sqrt{G} (l^n + p^n) dV.$$

Setzt man nun fest, daß ihre Variation auf dieser Oberfläche verschwinden soll, so folgt:

$$(84) \quad \delta \iiint (\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2) \sqrt{G} d\omega = 0.$$

Jeder Teil \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 von \mathfrak{H} , sowie diese Funktion selbst erfüllt also die beiden Hilbertschen Axiome.

Die Ausrechnung liefert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_1 &= \frac{1}{8\pi\kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{2}{8\pi\kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \lg I \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{\lg I}{8\pi\kappa} \cdot \frac{2}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} + \frac{2}{8\pi\kappa} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \lg I}{\partial x_\nu} \right). \end{aligned}$$

1) Vgl. A. Einstein, l. c. p. 784f.

Nun war

$$(77) \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} \mathfrak{R},$$

also

$$\tilde{\Phi}_1 = \frac{\lg I}{8\pi s} \cdot \mathfrak{R} + \frac{1}{4\pi s} g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\nu}.$$

Die Massendichte \mathfrak{d} war

$$\frac{\mathfrak{R}}{8\pi s},$$

der Skalar

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\mu} \frac{\partial \lg I}{\partial x_\nu} = g^2$$

stellt das Quadrat des Gravitationsvektors dar.

$$(85) \quad \tilde{\Phi}_1 = \mathfrak{d} \cdot \lg I + \frac{1}{4\pi s} \cdot g^2$$

kann als die Energiedichte der Gravitation für den Ruhezustand angesehen werden.

Entsprechend wird:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sqrt{G} g^{\nu\beta} g^{\mu a} q_a \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} \right) \\ &= \frac{q_a}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \sqrt{G} g^{\nu\beta} g^{\mu a} M_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \sqrt{G} g^{\nu\beta} g^{\mu a} \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial q_a}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach (79) $q_a d_a$ oder $g^{a\sigma} q_a d_\sigma$, das skalare Produkt von Potential und Dichte; der zweite aber kann durch gleichzeitige Vertauschung von μ mit ν und a mit β die Gestalt

$$g^{\nu\beta} g^{\mu a} \left(\frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{\partial q_\beta}{\partial x_a}$$

annehmen, ist also gleich:

$$\frac{1}{2} g^{\nu\beta} g^{\mu a} \left(\frac{\partial q_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial q_\mu}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial q_\beta}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{1}{2} g^{\nu\beta} g^{\mu a} M_{\mu\nu} M_{\beta\alpha},$$

also $\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2$, d. h. gleich dem halben Quadrat des elektromagnetischen Vektors. So stellt

$$(86) \quad \tilde{\mathfrak{Q}}_2 = q_a d^a + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2$$

die elektromagnetische Energiedichte im Ruhezustande dar.

Die Summe beider Energiedichten erfüllt also die an die Weltfunktion gestellten Ansprüche; insbesondere ergeben sich die beiden Hilbertschen Axiome als Folgerungen aus dem Aufbau des gesamten Weltbildes aus den Primäröhren der einzelnen Elektronen und dem Sekundärgebiet des freien Äthers.

Schluß.

Der Einfluß der Materie auf die elektromagnetischen Fundamentalgrößen und der Atombau.

Zum Schluß möchte ich noch ganz kurz zwei Fragen streifen, die sich bei jeder Theorie der Materie und der Elektrizität aufdrängen. Bekanntlich ändern sich die elektromagnetischen Gleichungen durch den Einfluß der Materie, was durch die magnetische Permeabilität und die Dielektrizitätskonstante ausgedrückt wird. Diese Änderung muß nun nach unserer Theorie durch die Verzerrung des Raumzeitkontinuums geleistet werden, die ja selbstverständlich innerhalb der Materie, d. h. in der Nähe sehr vieler Elektronen am stärksten ist. Diese Verzerrung drückt sich ja auch in der Änderung der Lichtgeschwindigkeit l aus, die ja ebenfalls durch die beiden obigen materiellen Konstanten beeinflußt wird, und zwar erfolgt die Änderung im richtigen Sinne, da die veränderliche Lichtgeschwindigkeit l am kleinsten innerhalb der Elektronen wird, während sie um so mehr wächst, je weiter man sich von diesen entfernt.

Eine zweite Frage ist die nach dem Atombau. Nach unserer Theorie setzt sich die Materie restlos aus positiven und negativen Elektronen zusammen, die gleiches Volumen, gleiche Masse und absolut gerechnet gleiche Ladung haben. Es unterliegt nun aber wohl kaum mehr einem Zweifel, daß wir es in den Atomen mit einem positiv geladenen Kern und sehr wenigen freien negativen Elektronen zu tun haben (oder auch mit einem neutralen Kern). Nach unserer Theorie wäre dann der Kern aus einer größeren Menge, über tausend, Elektronen beider Arten mit einem geringen Überschuß der positiven zusammenzusetzen, die sehr eng aneinanderliegen und

sich gegenseitig sehr fest binden. Das letztere erscheint trotz des Überschusses der positiven Ladung wohl möglich, da bei Einordnung der Elektronen mit abwechselndem Vorzeichen in ein Raumgitter die Anziehung der näheren die Abstoßung der ferneren überwiegt.

(Eingegangen 7. November 1916.)

**3. Nachtrag zu der Arbeit:
„Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und
der Gravitation“;
von E. Reichenbächer.**

Der grundlegende Unterschied meiner Gravitationstheorie gegen die von Einstein, mit der sie so vieles gemeinsam hat, besteht in der Zurückführung der Verzerrung des Raumzeitkontinuums auf die elektromagnetische Drehung ϑ und im Anschluß daran in der Annahme eines einzigen skalaren, mit der Lichtgeschwindigkeit zusammenhängenden Gravitationspotentials statt der 10 Komponenten des Einsteinschen Fundamental-tensors. Demgegenüber verschwindet der in der Anwendung erhaltene Unterschied in dem Werte der Vorrückung des Perihels. Dieser ist nämlich nur auf die abweichende Form des Ausdruckes für das Bogendifferential zurückzuführen. In räumlichen Polarkoordinaten lautet dies bei Einstein¹⁾ für den materiefreien Äther:

$$(I) \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\psi^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right) dx_0^2,$$

bei mir dagegen:

$$(II) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\psi^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2 dx_0^2,$$

da ich die Verzerrung in der radialen Richtung beseitigt wissen wollte.

Die erste Folge dieser abweichenden Annahme ist die, daß im Falle (I) sämtliche Komponenten $K_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors, im Falle (II) dagegen nur die skalare Krümmung $\mathfrak{R} = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ im Äther verschwindet. Eine zweite Folgerung ergibt sich bei der Aufstellung der Punktbewegung. Dabei ist zunächst interessant, daß meine Gleichungen

1) Vgl. dazu auch H. Reißner I. c. und K. Schwarzschild, Berliner Akad. Ber. p. 189ff. 1916.

$$40b \dots \frac{\frac{d^3 x_\tau}{d s^3}}{g_0 \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2} = \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{\partial x_\tau} (\tau = 1, 2, 3)$$

durch die 4. ergänzt werden müssen:

$$(III) \quad \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} = 0,$$

um der Bedingung

$$(II) \quad \sum_{\tau=1}^3 \left(\frac{d x_\tau}{d s} \right)^2 + g_0 \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2 = 1$$

zu genügen. Aus dieser folgt nämlich:

$$\sum_{\tau=1}^3 \frac{d x_\tau}{d s} \frac{d^3 x_\tau}{d s^3} + \frac{d x_0}{d s} \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} - \frac{1}{2} \frac{d g_0}{d s} \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2 = 0.$$

Setzt man hierin den Wert aus (40b) ein, so erhält man:

$$g_0 \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2 \sum_{\tau=1}^3 \frac{d x_\tau}{d s} \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{\partial x_\tau} + \frac{d x_0}{d s} \frac{d}{d s} g_0 \frac{d x_0}{d s} - \frac{1}{2} \frac{d g_0}{d s} \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2 = 0.$$

Da

$$\frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{\partial x_0} = 0$$

ist, erhält man:

$$\sum_{\tau=1}^3 \frac{d x_\tau}{d s} \frac{\partial \lg \sqrt{g_0}}{\partial x_\tau} = \frac{d \lg \sqrt{g_0}}{d s} = \frac{1}{2 g_0} \frac{d g_0}{d s};$$

das 1. und das 3. Glied heben sich auf, und es bleibt die Gleichung (III) übrig; denn $d x_0/d s$ ist nicht 0.

Überträgt man Gleichung (III) auf den Einsteinschen Ansatz, was wegen des in bezug auf x_0 gleichartigen Baues der Formel für das Linienelement zulässig ist, so erhält man:

$$g_0 \frac{d x_0}{d s} = c_0, \quad g_0 \left(\frac{d x_0}{d s} \right)^2 = \frac{c_0^2}{g_0}.$$

Setzt man diesen Wert in (I) ein, so wird

$$(IV) \quad 1 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{d r}{d s} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d \varphi}{d s} \right)^2 + r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d \psi}{d s} \right)^2 + \frac{c_0^{2(1)}}{1 - \frac{\alpha}{r}}.$$

1) D. h. der Energiesatz; dieser wird also durch die leichte Integration der Gleichung (III) geliefert; entsprechend hätte ich ihn auch für den Ansatz (II) herleiten können.

Der Flächensatz folgt aus den Gleichungen (40b), die auch nach ihrer Umformung für den Ansatz (I) jedenfalls die Folgerung $d^2 x_i/d s^2$ proportional x_i wie bei Einstein zulassen, woraus die Möglichkeit sich ergibt, $\psi = \text{const.}$ in (IV) zu setzen. Da dann aber

$$(V) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{iB}{r^2},$$

so folgt aus (IV):

$$1 = - \frac{B^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 - B^2 \left(\frac{1}{r} \right)^2 + \frac{c_0^2}{1 - \frac{\alpha}{r}},$$

d. h. die Einsteinsche Gleichung¹⁾

$$\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c_0^2 - 1}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r^2},$$

die sich übrigens auch aus seiner Voraussetzung der Punktbewegung als kürzester Weltlinie ohne jede Vernachlässigung höherer Glieder folgern lässt.

Wie man sieht, verträgt sich also auch die Einsteinsche Planetenbewegung durchaus mit der Annahme eines skalaren Gravitationspotentials; aber dies hängt für seinen Ansatz (I) nicht so einfach mit der Lichtgeschwindigkeit zusammen wie im Falle (II), für den einfach das Gravitationspotential

$$(VI) \quad \mathfrak{A} = \lg I,$$

gleich dem Logarithmus der Lichtgeschwindigkeit zu setzen ist. Für n anziehende Zentren ergibt sich dann einfach aus der Feldgleichung:

$$(VII) \quad \frac{R}{2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sqrt{G} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\mu}.$$

$$(VIII) \quad \mathfrak{A} = \lg I_1 + \lg I_2 + \dots + \lg I_n,$$

d. h. die resultierende Lichtgeschwindigkeit ist das Produkt der durch jedes besondere Elektron erzeugten Einzellichtgeschwindigkeiten.

Im Einsteinschen Falle (I) aber ist:

$$(IX) \quad R = \frac{d^2 I}{dr^2} + \frac{4 dI}{r dr} + 2 \frac{I - 1}{r^2}.$$

1) Berliner Akad. Ber. p. 837. Gleichung (11), 1915.

Daraus folgt, wenn A eine Funktion von r allein soll:

$$(X) \quad A = \frac{1}{2} \lg l + \int \frac{dr}{r} \left(1 - \frac{1}{l} \right).$$

Beide Gleichungen (IX) und (X) führen zu gewissen Unzuträglichkeiten. Will man nämlich den stetigen Übergang für das Gravitationspotential von innen nach außen wahren, so ist in der für das Innere gültigen Formel

$$g_0 = \frac{\cos^2 \vartheta}{k_0^2}$$

wegen $\cos \vartheta > 1$ die Größe k_0 als von 1 verschieden anzunehmen. Dann erhält man aber für R im Mittelpunkte des Elektrons einen unendlich großen Wert. Dies könnte man vermeiden, wenn man im Innern des Elektrons Ansatz (II), außen aber (I) gelten läßt. Dann ist freilich für die Größe g_1 ein stetiger Übergang nicht möglich. Gleichung (X) aber gibt für n Elektronen keinen so eleganten Ausdruck wie (VIII); denn es gilt zwar wegen des besonderen, durch (IX) bedingten Wertes von l im freien Äther die Gleichung:

$$(XI) \quad A = -\frac{1}{2} \lg l ;$$

diese trifft aber im Innern nicht mehr zu.

Es hat sich also herausgestellt, daß auch bei meiner Auffassung des Gravitationspotentials als Skalar die Einstein-sche Punktbewegung sich ergibt, wenn ich den Ausdruck (I) für das Bogendifferential wähle. Trotzdem möchte ich nicht so ohne weiteres diesen vor dem Ansatz (II) bevorzugen, sondern die Vorteile folgendermaßen abwägen¹⁾:

In Fall (I) verschwinden

1. alle Komponenten $K_{\mu\nu}$ des Krümmungstensors, während für (II) nur $R = 0$ wird. Ferner ergibt sich
2. die Vorrückung des Perihels richtig für den Merkur, vorausgesetzt, daß alle störenden Massen schon richtig in Rechnung gesetzt sind.

Im Fall (II) dagegen erscheint

1. der Raum durch die Gravitation eines in ihm ruhenden Körpers nicht verzerrt, und es wird

1) Vgl. auch F. Kottler, Ann. d. Phys. 50. p. 972. 1916.

2. der Wert der mit der Gesamtkrümmung zusammenhängenden Massendichte \mathfrak{d} bei Wahrung des stetigen Überganges aller Fundamentalgrößen nirgends unendlich.

3. Die resultierende Lichtgeschwindigkeit lässt sich aus den einzelnen auf die einfachste Art berechnen.

Wenn daher nicht die unbedingt sichere Gewähr für die Richtigkeit der Annahme (I) durch astronomische Messungen gegeben wird, möchte ich mich doch für (II) entscheiden.

Schließlich möchte ich nochmals auf den einfachen Bau der Formel für die Weltfunktion \mathfrak{H}_1 bei skalarem Gravitationspotential hinweisen:

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{A} + \frac{1}{4\pi\kappa} g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\nu}.$$

In dieser ist die Feldgleichung (VII) nicht nur, wie schon gezeigt, implicite enthalten, sondern kann auch daraus hervorgehen, wenn man bei der Variation \mathfrak{d} und $\partial \mathfrak{A}/\partial x_\mu$ konstant lässt. Genau so ergeben sich die elektrischen Feldgleichungen aus \mathfrak{H}_2 .

(Eingegangen 5. Dezember 1916.)

*4. Studium der magnetischen und optischen
Erscheinungen kolloidaler Eisenlösungen. Ein
Beitrag zur Konstitution ultramikroskopischer
Eisenoxydhydratteilchen;
von R. Gans und H. Isnardi.*

(Nach Messungen von H. Isnardi.)

§ 1. *Einleitung.* Wie Majorana¹⁾ fand, wird eine kolloide Eisenoxydhydratlösung im Magnetfelde doppelbrechend, und Schmauss²⁾ wies wohl einwandfrei nach, daß die Doppelbrechung von der Orientierung der suspendierten Partikeln herröhrt, indem er durch Gelatinezusatz die Reibung des Lösungsmittels vergrößerte und beobachtete, daß dann die Doppelbrechung Zeit gebraucht, um sich auszubilden bzw. wieder zu verschwinden.

Ferner beobachtete Majorana³⁾, daß gewisse kolloidale Eisenlösungen bei Erhöhung der Feldstärke einen Übergang von negativer zu positiver Doppelbrechung aufweisen, und Schmauss fand auch bei konstanter Feldstärke und Erhöhung der Temperatur eine Inversion von positiver zu negativer Doppelbrechung. Er glaubt, dieses Phänomen dadurch erklären zu können, daß er annimmt, bei tiefen Temperaturen seien die Teilchen relativ zum Lösungsmittel diamagnetisch, dagegen bei hohen Temperaturen paramagnetisch oder umgekehrt.

Diese Erklärung, die uns theoretisch nicht stichhaltig scheint, wie wir weiter unten sehen werden, wurde auch durch Cotton und Mouton⁴⁾ widerlegt, die experimentell zeigten, daß die suspendierten Teilchen relativ zu der sie um-

1) Q. Majorana, Rend. Acc. dei Lincei **11**. 1. sem. p. 374, 463, 531; 2. sem. p. 90, 139. 1902.

2) A. Schmauss, Ann. d. Phys. **12**. p. 186. 1903.

3) Q. Majorana, l. c. **11**. 1. sem. p. 533. 1902.

4) A. Cotton u. H. Mouton, Les ultramicroscopes et les objets ultramicroscopiques p. 198.

gebenden Flüssigkeit stets paramagnetisch sind. Leider waren uns die Originalarbeiten dieser beiden Forscher infolge der schlechten argentinischen Bibliotheksverhältnisse unzugänglich.

Schließlich sei noch das wichtige Ergebnis erwähnt, das Diesselhorst und Freundlich¹⁾ nach ihrer Schlierenmethode fanden, nämlich, daß die ultramikroskopischen Eisenteilchen weder Stäbchen- noch Scheibenform haben, sondern mehr oder weniger kugelig sein müssen, oder genauer gesagt, daß die geringen Abweichungen von der Kugelform keineswegs den ganzen Betrag der Doppelbrechung erklären können, sondern daß das Material selbst, aus dem die Teilchen bestehen, bereits anisotrop sein muß.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Doppelbrechung und den Magnetismus kolloidaler Eisenlösungen in ihrer Abhängigkeit von der Feldstärke und der Temperatur zu studieren, um Schlüsse auf die Konstitution der amikroskopischen Teilchen zu ziehen.

Erster Teil. Die magnetische Doppelbrechung.

§ 2. Die Versuchsanordnung. Zur Messung der magnetischen Doppelbrechung bedienten wir uns folgender Anordnung (Fig. 1).

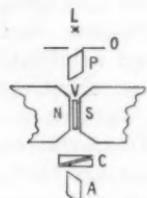


Fig. 1.

Das Licht einer Bogenlampe *L* wurde mittels einer Linse parallel gemacht, ging dann durch die Blende *O* und wurde durch den Nicol *P*, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die horizontalen Kraftlinien des Dubois'schen Elektromagneten *N S* geneigt war, polarisiert, passierte dann den Trog *V* mit der Eisenlösung, den Babinet'schen Kompensator *C* und den Analysator *A*.

Die Endflächen der Polschuhe waren Rechtecke von 50 mm Länge und 15 mm Höhe.

Zwei verschiedene Küvetten wurden zur Messung der magnetischen Doppelbrechung verwendet. Die erste, für konstante Temperatur als Funktion des Feldes, war ein Ley-

1) H. Diesselhorst u. H. Freundlich, Physik. Zeitschr. 17. p. 117. 1916. — Leider ist uns die Elster-Geitel-Festschrift, in der Diesselhorst, Freundlich und Leonhardt den Majoranaeffekt studiert haben müssen, wegen des Krieges unzugänglich.

boldscher Trog von 36 mm Länge und 8 mm Breite, der sich in einem Interferrikum von 9 mm befand. Der zweite, *T*, zum Studium der Temperaturabhängigkeit bestimmt (Fig. 2), bestand aus innen vernickeltem Kupfer, hatte eine Länge von 36 mm und eine Breite von 10 mm und befand sich in einem Interferrikum von 11 mm.

Die beiden Fenster *L* und *L'* waren aus Glas und wurden mittels Gummidichtungen an die Trogwand gedrückt.

Um bei verschiedenen Temperaturen beobachten zu können, war der eigentliche Trog *T* mit einem prismatischen Zinkgefäß *R* umgeben. Durch die Rohransätze *A* und *A'* konnte Wasser in dies äußere Gefäß ein- bzw. wieder aus demselben austreten, das aus einem heiz- oder kühlbaren größeren Reservoir stammte und mittels einer durch einen elektrischen Motor betriebenen kleinen Zentrifugalpumpe in Zirkulation versetzt wurde.

Da das Reservoir groß und die Pumpe sehr wirksam war, konnten die Temperaturen im Troge *T* lange Zeit konstant gehalten werden.

Die Eichung des Babinet'schen Kompensators ergab, daß für das Licht der Bogenlampe, das durch die Bravais'schen Lösungen hindurchging, eine Wellenlänge Phasendifferenz gleich 2680 Teilstrichen der Mikrometerschraube war. Hierbei wirkte also die Flüssigkeit selbst als Strahlenfilter, und die Messungen beziehen sich somit auf den Teil des Spektrums, der zwischen Rot und Gelb liegt. Auf exaktere Definition der Wellenlänge durch Anwendung homogenen Lichtes verzichteten wir im Interesse größerer Intensität.

Will man die beobachtete Doppelbrechung in Wellenlängen haben, so hat man somit die in den folgenden Tabellen verzeichneten Werte von Δ durch 2680 zu dividieren.

Die Feldmessung wurde nach der ballistischen Methode ausgeführt unter Benutzung einer kleinen ballistischen Spule aus zwei rechteckigen Windungen eines blanken Kupferdrahtes, die auf ein rechteckiges Stück Hartgummi gewickelt waren. Die Ausmessung der Windungsfläche erfolgte mittels eines Zeiss'schen Komparators und ergab als Länge bzw. Breite der Windungsfläche 42,06 mm bzw. 7,595 mm.

Die Empfindlichkeit des ballistischen Galvanometers wurde

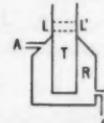


Fig. 2.

mit einer wechselseitigen Induktion von Siemens & Halske bestimmt.

Dann wurde mit einer kleinen Spule von 3 mm Durchmesser die Homogenität des Feldes in der Strahlrichtung gemessen. Es ergab sich hinreichende Konstanz des Feldes im ganzen Bereich des durchstrahlten Troges.

§ 3. Die Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Feldstärke. Die Lösungen, welche zur Untersuchung benutzt wurden, waren sämtlich pharmazeutisches Bravaissches Eisen, welches durch Dialyse von den Eisenchloridbeimengungen befreit wurde. Durch Wasserzusatz wurde eine Ausgangssubstanz der Dichte 1,038 hergestellt.

Zunächst wurde an einer beliebig verdünnten Lösung der Ausgangssubstanz die magnetische Doppelbrechung als Funktion der Feldstärke bei der konstanten Temperatur von 14° gemessen. Die folgende Tabelle enthält die Doppelbrechung Δ in Trommelteilen des Babinschen Kompensators, und zwar ergab eine Versuchsreihe bei steigenden Werten von H die Kolumne der Δ_1 , eine andere bei abnehmenden H die Kolumne der Δ_2 ; Δ ist das Mittel.

Tabelle 1.

H in Gauss	Δ_1	Δ_2	Δ	$\frac{\Delta}{H^2} \cdot 10^6$
6200	- 41	- 38	- 39,5	- 1026
10340	- 112	- 109	- 110,5	- 1033
13960	- 205	- 204	- 204,5	- 1048
18040	- 332	- 337	- 334,5	- 1025
18730	- 359	- 367	- 363,0	- 1035

Aus der letzten Kolumne sieht man, daß Δ/H^2 , wie auch schon Majorana fand, konstant ist, und zwar wird die Lösung unter dem Einflusse des Feldes ein *negativer* einachsiger Kristall.

Um zu sehen, wie bei Doppelbrechung von der Konzentration abhängt, wurde eine etwa doppelt so konzentrierte Lösung wie die vorige hergestellt, deren Konzentration C wir willkürlich 1 nennen wollen, und ihre Doppelbrechung gemessen; darauf wurde dieselbe in gemessenen Verhältnissen verdünnt, wieder die Doppelbrechung bestimmt, und so erhielten wir die folgende Beobachtungsreihe für 15,5°.

Tabelle 2.

H	$c = 1$		$c = 0,44$		$c = 0,19$	
	A	$\frac{A}{H^2} \cdot 10^9$	A	$\frac{A}{H^2} \cdot 10^9$	A	$\frac{A}{H^2} \cdot 10^9$
11 180	-272	-2175	-106	-849	-55	-440
16 960	-611	-2125	-257	-891	-128	-446
18 700	-762	-2185	-322	-918	-160	-460
Mittel $\frac{A}{H^2} \cdot 10^9$		-2162		-886		-449
$\frac{A}{H^2 c} \cdot 10^9$		-2162		-1969		-2274

Wir erkennen also, daß die Doppelbrechung der Konzentration merklich proportional ist, d. h. daß die einzelnen Teilchen keine Wechselwirkung aufeinander ausüben.

Da Schmauss, wie in der Einleitung erwähnt wurde, die Inversion der positiven Doppelbrechung bei einer bestimmten Temperatur in negative dadurch erklären will, daß einmal die suspendierten Teilchen paramagnetisch gegen die sie umgebende Flüssigkeit, das andere Mal diamagnetisch sind, so haben wir, um die Berechtigung dieser Annahme zu prüfen, die Doppelbrechung in Feldern verschieden großer Interferenz gemessen. Denn für die Einstellung para- bzw. diamagnetischer Partikel im Magnetfelde ist bekanntlich nicht die Richtung der Kraftlinien, sondern die Verteilung ihrer Dichte maßgebend.¹⁾ In einem gleichförmigen Felde wirken überhaupt keine merklichen Kräfte.

Um die Doppelbrechung zu vergrößern, alterten wir eine Lösung künstlich, indem wir sie drei Stunden lang in geschlossenem Gefäß auf 70° hielten, und brachten sie, nachdem wir sie auf 5° abgekühlt hatten, in die aus der folgenden Tabelle ersichtlichen Felder.

Wir regulierten also die Stromstärken des Elektromagneten so, daß die Feldstärke annähernd gleich war. Trotzdem war natürlich die Inhomogenität der Felder wegen der verschiedenen

1) Vgl. z. B. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. Leipzig 1900. p. 210. — R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. Leipzig und Berlin 1908. p. 90.

Tabelle 3.

Poldistanz	Magnetisierende Stromstärke	H in Gauss	Δ
11 mm	4 Amp.	9172	309
18 "	11,2 "	9460	340
26 "	23 "	8813	315

Polabstände sehr verschieden, und wenn es sich um die Orientierung para- oder diamagnetischer Teilchen handeln würde, müßte in den drei Versuchen der Effekt sehr verschieden ausfallen, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. Somit ist zunächst schon hier gezeigt, daß die Doppelbrechung nur von der *Stärke* des Feldes und nicht von seiner *Streuung* abhängt, daß also die Hypothese von Schmauss unrichtig sein muß.

Eine künstlich gealterte Lösung wurde sodann auch auf ihre Doppelbrechung in ihrer Feldabhängigkeit bei 12° untersucht und ergab, wie aus folgender Tabelle ersichtlich, auch Konstanz von Δ/H^2 .

Tabelle 4.

H	$-\Delta$	$-\frac{\Delta}{H^2} \cdot 10^3$	H	$-\Delta$	$-\frac{\Delta}{H^2} \cdot 10^3$
6700	150	334	17300	985	329
9500	300	332	17500	1010	330
11700	458	342	17800	1050	331
13100	580	337	18000	1080	333
14000	645	329	18300	1115	333
14900	751	338	18600	1135	327
15500	820	341	18800	1160	328
16000	858	335	18900	1190	333
16500	924	339	19000	1210	335
16900	945	330			

Um die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, die bei kolloidalen Eisenlösungen vorkommen, zu illustrieren, seien noch zwei Beobachtungsreihen erwähnt. Bei der ersten war Δ , wie auch schon Majorana gelegentlich beobachtete, in schwachen Feldern negativ und schlug bei $H = 7000$ Gauss in positives Δ um. Hier gilt also das Gesetz $\Delta/H^2 = \text{const}$ nicht. Bei der zweiten war zwar Δ proportional H^2 ; aber der Wert von Δ

war positiv, trotzdem die Messungen bei derselben Temperatur ausgeführt waren, wie die in Tab. 4 gegebene Meßreihe.

§ 4. Die Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Temperatur. An derselben Lösung, für welche in Tab. 4 die Feldabhängigkeit der Doppelbrechung dargestellt ist, wurde dann für ein konstantes Feld von 7000 Gauss die Temperaturabhängigkeit zwischen 0° und 80° gemessen. Die Resultate sind in Tab. 5 und graphisch in Fig. 3 wiedergegeben.

Tabelle 5.

t	Δ	t	Δ
0°	1000	35°	-1220
5	500	39	-980
7,5	150	45	-750
10	-100	50	-630
12	-250	55	-450
17	-650	60	-305
20	-810	65	-190
25	-1050	70	-150
30	-1300	80	-120

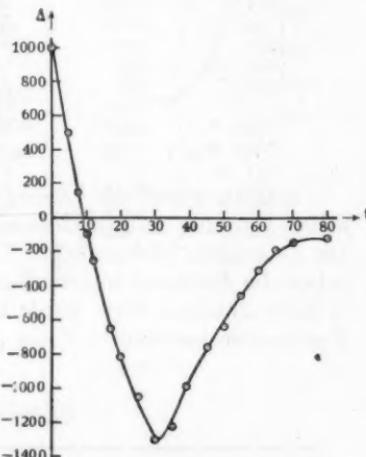


Fig. 3.

Wir sehen also, daß die Doppelbrechung bei tiefen Temperaturen positiv ist, bei 9° verschwindet, dann negativ wird, ein Minimum bei ca. 32° besitzt, und daß bei noch höheren Temperaturen die Lösung wieder dem isotropen Zustande zustrebt. Dieses Minimum scheint bisher nicht beobachtet worden zu sein.

Dann sollte an einem kräftig doppelbrechenden, d. h. gealterten Material die Feld- und Temperaturabhängigkeit der Anisotropie studiert werden. Um aber gleichzeitig auch den Einfluß der Alterung kennen zu lernen, haben wir zuerst einige Beobachtungen an der nicht gealterten Lösung angestellt.

Zu dem Zweck wurde eine Bravaissche Eisenlösung dialysiert und seine Dichte bei 15° zu 1,026 bestimmt. Da die Flüssigkeit so viel zu viel Licht absorbierte, wurde sie bis zur Dichte 1,0045 verdünnt und in einem Felde von

16000 Gauss die Temperaturabhängigkeit der Doppelbrechung beobachtet. Es ergab sich (vgl. auch Fig. 4)

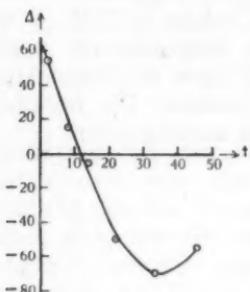


Fig. 4.

Tabelle 6.

t	A	t	A
2°	55	22°	-50
8	15	33	-70
14	-5	45	-55

Der Inversionspunkt liegt bei 12° und das negative Minimum bei ca. 35°.

Sodann wurde die Lösung 7 Stunden lang zwecks künstlicher Alterung in geschlossenem Gefäß auf 100° erwärmt. Die folgenden beiden Tabl. 7 und 7a und Figg. 5 und 5a geben die Beobachtungsresultate zweier unabhängiger Serien; in jeder einzelnen Serie wurde bei steigender und abnehmender Temperatur beobachtet.

Tabelle 7.

t	Die Größe A			
	$H = 7730$	$H = 13100$	$H = 15600$	$H = 16900$
3°	526	2435	3892	4857
12	423	1810	3370	3673
22	127	845	1539	1955
34	-260	-280	-170	-70
44	-668	-1485	-1947	-2080
54	-980	-2410	-3220	-3780
64	-487	-1357	-1809	-2039
74	-212	-547	-747	-860
82	-139	-330	-330	-334
72	-273	-824	-1030	-1264
61	-945	-2321	-3088	-3573
45	-834	-1753	-2397	-2577
35	-457	-400	-160	+10
25	0	+600	+1086	1565
14	+240	1360	2237	2871
3	720	2943	4410	5392

Tabelle 7a.

t	Die Größe A			
	H = 7730	H = 13100	H = 15600	H = 16900
3°	432	2398	3880	4850
16	304	1480	2330	2914
25	83	1058	1206	1876
33	- 203	- 80	123	296
44	- 700	- 1537	- 1884	- 2108
52	- 967	- 2325	- 3159	- 3565
57	- 926	- 2297	- 3096	- 3484
67	- 470	- 1168	- 1612	- 1854
75	- 109	- 416	- 600	- 692
85	0	- 147	- 200	- 260
73	- 260	- 600	- 902	- 1054
64	- 559	- 1425	- 1847	- 2177
53	- 1056	- 2654	- 3486	- 3800
45	- 477	- 1884	- 2245	- 2350
35	- 374	- 374	- 279	- 144
26	+ 56	+ 696	+ 1338	+ 2036
16	391	1781	2795	3268
3	786	2933	4590	5373

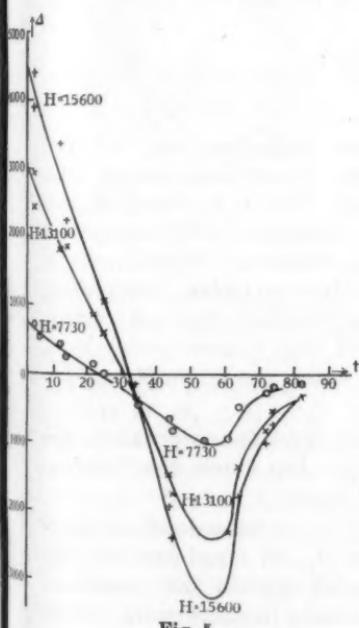


Fig. 5.

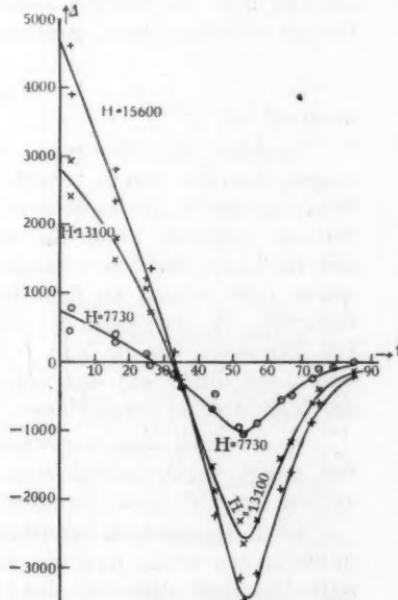


Fig. 5a.

In den Figg. 5 und 5a ist, um die Deutlichkeit nicht zu vermindern, die Kurve, welche $H = 16900$ Gauss entspricht, fortgelassen worden.

Aus den Beobachtungen ersieht man:

1. daß durch die Alterung die Inversionstemperatur wächst; denn während sie für 16000 Gauss bei der frischen Lösung 12° betrug (Fig. 4), ist sie bei der hier untersuchten 33° ;
2. daß die Inversionstemperatur mit der Feldstärke ein wenig zunimmt;
3. daß die Temperatur, welche dem negativen Minimum der Doppelbrechung entspricht, durch die Alterung zunimmt; denn während sie bei der frischen Lösung 35° betrug, ist sie bei der gealterten ungefähr 55° ;
4. daß diese Temperatur des Minimums nicht vom Felde abhängt;
5. daß bei den gealterten Lösungen zwar Δ/H^2 für eine bestimmte Temperatur keineswegs konstant ist, daß aber, insofern man die Kurven zwischen 0° und 55° genähert als Gerade auffassen kann, genähert

$$\frac{\Delta_t - \Delta_0}{t H^2}$$

konstant ist.

Nachdem die Messungen über Doppelbrechung der Lösungen beendet waren, wurde die Versuchsanordnung zum Studium des Magnetismus gemacht. Dies nahm ziemlich viel Zeit in Anspruch, und da die Lösungen erfahrungsgemäß sich im Laufe der Zeit verändern, wurde die Doppelbrechung später noch einmal an derselben Bravaischen Eisenlösung bestimmt, an der auch die Suszeptibilität gemessen wurde. Die Resultate, die in Tab. 8 und Fig. 6 niedergelegt sind, sind somit direkt mit den weiter unten gegebenen Messungen des Magnetismus vergleichbar.

Es sei noch eine merkwürdige Erscheinung erwähnt, die uns zuerst unverständlich war, die aber durch den Kurvenverlauf der Fig. 5 ihre Erklärung findet.

Ist die Temperatur der Lösung in der Nähe des Inversionspunktes, und erregt man ein Feld H_2 , so verschiebt sich der schwarze Zentralstreifen des Babinet'schen Kompensators zuerst so, als ob die Doppelbrechung negativ wäre, kehrt

Tabelle 8.

t	Die Größe Δ		
	$H = 9500$	$H = 12500$	$H = 15900$
4,5°	875	1560	2000
6,5	696	1335	2043
7,5	368	862	1415
9,0	250	655	1100
10,0	90	370	685
10,9	0	175	645
13,0	-230	-270	-320
15,0	-345	-540	-655
21,0	-600	-1015	-1500
37,5	-645	-1050	-1950
48,5	-380	-765	-875
55,0	-200	-380	-570

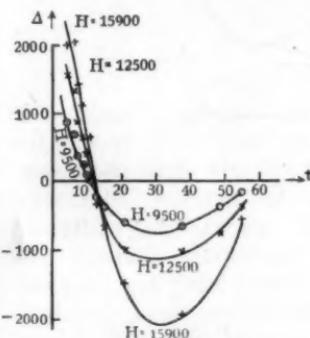


Fig. 6.

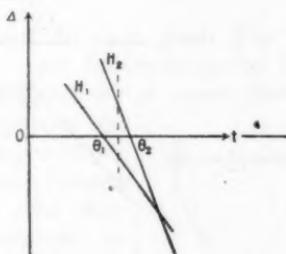


Fig. 7.

dann um und kommt auf der entgegengesetzten Seite der Nullstellung zur Ruhe, somit positive Doppelbrechung anzeigen.

Bedenkt man, daß für ein Feld $H_1 < H_2$ die Inversions-temperatur $\Theta_1 < \Theta_2$ (vgl. Fig. 7), und daß das Feld H_2 wegen der Selbstinduktion des Elektromagneten Zeit gebraucht, um seinen vollen Wert zu erreichen, so ist die Doppelbrechung für eine Lösungstemperatur $t < \Theta_2$, wenn H den Wert H_1 hat, negativ, im stationären Endzustande $H = H_2$ aber positiv.

Diese Beobachtung zeigt qualitativ sehr deutlich, daß die Inversionstemperatur mit der Feldstärke wächst.

Zweiter Teil. Der Magnetismus der Eisenlösungen.

§ 5. Die Versuchsanordnung. Um die Suszeptibilität unserer Lösungen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur zu messen, benutzten wir eine Versuchsanordnung, wie sie Weiss und Foëx¹⁾ angewendet haben.

Die Polstücke eines Weissschen Elektromagneten sind von zwei vertikalen Ebenen begrenzt, die sich unter 120°

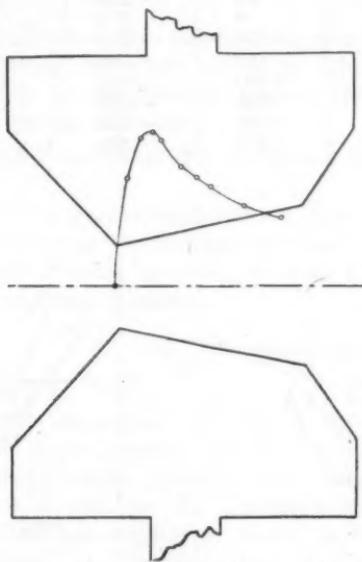


Fig. 8.

schnneiden (vgl. Fig. 8). Das Interferrikum hat an der schmalsten Stelle 19 mm Abstand. Man bringt das Material M an die Stelle der größten Kraft, um eine möglichst große Empfindlichkeit und Unabhängigkeit von kleinen Lagenänderungen zu haben. Die Kraft an den verschiedenen Stellen der in Fig. 8 gezeichneten Zentrallinie ist durch die Kurve in dieser Figur wiedergegeben.

1) P. Weiss u. G. Foëx, Arch. des sc. phys. et nat. (4) 81. p. 4 und 89. 1911.

Das Material befindet sich in einem Glasrohr R (Fig. 9), das an einem Glasstab SS' mittels eines Kupferdrahtes von 1 mm Durchmesser befestigt ist. Der Glasstab ist an zwei

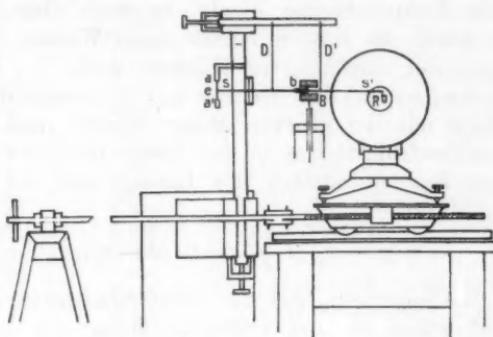


Fig. 9.

V-förmigen Kupferbändern D und D' (vgl. auch Fig. 10) aufgehängt und trägt an dem dem Elektromagneten abgewandten Ende eine feine Stahlspitze, die in einem Rubinlager ruht, welches auf der Rückseite des Spiegels e befestigt ist. Der Spiegel ist um eine vertikale Achse $a a'$ zwischen Lagern drehbar und wird durch eine sehr feine Uhrfeder in seiner Gleichgewichtslage gehalten. Jede Verschiebung des magnetischen Materials ruft eine Drehung des Spiegels hervor und lässt sich mit Fernrohr und Skala beobachten. Die Empfindlichkeit der Anordnung konnte variiert werden, indem der Abstand des Rubinlagers von der Spiegeldrehachse veränderlich war.

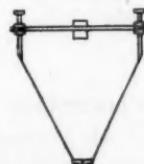


Fig. 10.

Wir benutzten wie Weiss eine Nullmethode zur Messung der Kraft, indem diese kompensiert wurde durch die Anziehung zweier koaxialer stromdurchflossener Spulen, von denen die kleinere b auf dem Glasstab angebracht war, die größere B auf einem Stativ festgelagert wurde. Zwei Metallbänder der Aufhängung dienten zugleich zur Stromzufuhr für die Spule b .

Nennt man die zur Kompensation nötigen Ströme in

der kleinen und großen Spule i bzw. J , so ist die Kraft $C i J$, wo C eine Konstante ist.

Das Glasrohr, in welchem die Lösung des Bravaisschen Eisens sich befand, tauchte in ein Gefäß mit Wasser, welches erstens als Temperaturbad diente, zweitens aber bewirkte, daß man direkt die Suszeptibilität gegen Wasser, d. h. den Magnetismus der suspendierten Teilchen, maß.

Füllt man einmal das Glasrohr mit m Gramm der Eisenlösung, dann mit der gleichen Menge Wasser, und sind die Kompensationsstromstärken in der Spule $B J$ bzw. J_0 , die spezifischen Suszeptibilitäten der Lösung und des Wassers χ bzw. χ_0 , so ist

$$m(\chi - \chi_0)H \frac{\partial H}{\partial x} = C i (J - J_0),$$

wenn H die Feldstärke, $\partial H / \partial x$ ihren Gradienten bedeutet. Dabei fällt schon bei der Differenzbildung von selbst der Magnetismus des Glasrohres fort, oder besser gesagt, die Messung mit Wasser im Rohr gibt direkt die Differenz des Magnetismus des Rohres und seiner Aufhängung gegen Wasser.

Will man die Suszeptibilitäten in absolutem Maße kennen, so braucht man nur das Glasrohr mit einer Eichsubstanz von bekannter Suszeptibilität zu füllen und auf diese Weise die Größe

$$\frac{C}{H \frac{\partial H}{\partial x}}$$

zu bestimmen.

Als Eichsubstanz benutzten wir eine Manganchloridlösung, deren spezifische Suszeptibilität $1,775 \cdot 10^{-6}$ betrug.

§ 5. Die Meßresultate. So ergaben sich folgende beiden Beobachtungsreihen, die voneinander unabhängig an verschiedenen Tagen gemacht wurden, und zwar war bei der ersten Beobachtungsreihe der Elektromagnet mit 8 Amp. erregt, während er bei der zweiten mit 16 Amp. erregt war.

Die Resultate sind in Fig. 11 graphisch dargestellt.

Wir sehen also, daß die Lösung bei allen Temperaturen paramagnetisch ist, und besonders, daß nicht etwa, wie Schmauss vermutet, im Inversionspunkt der Doppelbrechung der Magnetismus vom Para- in Diamagnetismus übergeht. Die Suszeptibilität der Teilchen nimmt mit der Temperatur ab und mit dem Felde zu.

Tabelle 9.

t	$(\chi - \chi_0) 10^6$
65°	1,094
57	1,101
50	1,176
45,5	1,182
40,3	1,206
36,5	1,215
33,5	1,286
29,5	1,314
21,0	1,327
16,3	1,378
12,0	1,402
10,0	1,408
7,0	1,456
5,0	1,486
2,0	1,493

Tabelle 9a.

t	$(\chi - \chi_0) 10^6$
66°	1,203
58	1,216
50	1,277
45	1,286
38	1,324
32	1,372
19	1,433
15	1,524
13	1,596
6	1,639
3	1,712

Um sicher zu gehen, daß $\chi - \chi_0$ tatsächlich ein Maß für die Suszeptibilität der suspendierten Teilchen ist, was zweifelhaft sein könnte, da wir nicht wissen, ob die die Teilchen umgebende Flüssigkeit wirklich Wasser ist, haben wir

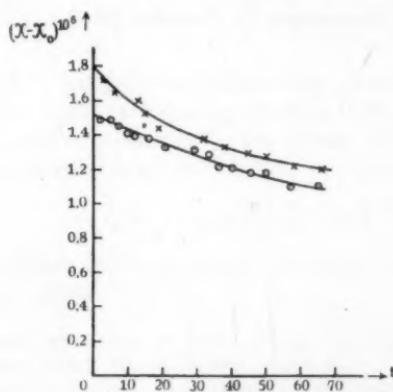


Fig. 11.

die Lösung ultrafiltriert, und es ergab sich, daß das Filtrat, trotzdem es noch gelblich ist, eine Suszeptibilität hat, die praktisch gleich der des Wassers ist.

§ 7. Schlußfolgerungen. Aus den Beobachtungen geht klar hervor, daß die suspendierten Teilchen keine isotropen

Kugeln sein können, worauf schon Cotton und Mouton hinwiesen.

Der Verlauf der Suszeptibilitätskurve als Funktion der Temperatur ließe sich erklären durch die Annahme, daß die Teilchen zwar isotrop sind, aber von der Kugelgestalt abweichen, so daß sie in einem gleichförmigen Felde Richtungskräfte erfahren, die die thermische Agitation wieder zu zerstören sucht.

Aber wenn auch die Amikronen *magnetisch* isotrop sind, so können sie es optisch keinenfalls sein; denn sonst würde man nicht eine so komplizierte Abhängigkeit der Doppelbrechung von der Temperatur beobachten. Vermutlich wird sogar die Anisotropie des Moleküls eine verwickelte Funktion der Temperatur sein, so daß durch Temperaturänderung sowohl die Doppelbrechung der Moleküle als auch die Richtungsverteilung der Teilchen im Raum infolge der Zusammenstöße geändert wird.

La Plata, Instituto de Fisica, 15. Juli 1916.

(Eingegangen 12. Dezember 1916.)

5. *Die adiabatischen Invarianten bedingt periodischer Systeme¹⁾;*
von J. M. Burgers.

Einleitung.

In letzterer Zeit hat die Quantentheorie große Fortschritte gemacht durch das Studium der sogenannten „bedingt periodischen“ Systeme.²⁾ Für diese Systeme charakteristisch ist die Eigenschaft: das Wirkungsintegral

$$W = \int 2 T \cdot dt$$

(T = kinetische Energie) ist zu zerlegen in einer Summe von Integralen, von denen jedes nur von *einer* Koordinate abhängig ist:

$$(1) \quad W = \sum_k \int dq_k \sqrt{F_k(q_k)}.$$

Im allgemeinen hat jede Koordinate eine „Librationsbewegung“ zwischen zwei festen (aus den integrierten Bewegungsgleichungen zu bestimmenden) Grenzen.³⁾ Bei diesen Systemen wird als Quantelungsprinzip folgender Ansatz benutzt:

$$(2) \quad I_k = \int dq_k \sqrt{F_k(q_k)} = n_k \hbar \quad (n_k: \text{ganze Zahl})$$

wo bei der Integration q_k einmal zwischen ihren Grenzwerten hin und her geht.

1) Zuerst erschienen in Versl. Akad. van Wetensch. Amsterdam (25. November 1916.) (Comm. Leiden, Suppl. 41 c). Einige hier nur angedeutete Rechnungen sind dort ausführlicher behandelt worden.

2) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Berliner Akad. p. 548. 1916. P. Epstein, Ann. d. Phys. 50. p. 490. 1916; 51. p. 168. 1916. P. Debye, Gött. Nachr. p. 142. 1916; Physik. Zeitschr. 17. p. 507, 512. 1916. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. p. 1. 1916. Physik. Zeitschr. 17. p. 491. 1916. — Eine große Gruppe dieser Systeme ist zuerst von P. Stäckel angegeben worden (Compt. Rend. 116. p. 485. 1893; 121. p. 489. 1895). Ausführlich ist die Theorie behandelt von Charlier, Die Mechanik des Himmels, I.

3) Vgl. Charlier, I. c. Vgl. auch Fußnote 2 p. 196.

Nun hat P. Ehrenfest¹⁾ gezeigt, welche große Bedeutung für die Quantentheorie die „adiabatischen Invarianten“ besitzen, das sind Größen, deren Wert nicht geändert wird bei einer adiabatischen Beeinflussung (Definition bei Ehrenfest, l. c. und unten § 1) des Systems. Speziell hat er gezeigt, daß die älteren, von Planck, Debye, Bohr und Sommerfeld benutzten Quantenansätze sich auf solche Größen beziehen.

Wie schon von Hrn. Ehrenfest bemerkt worden ist, würde es also von Wichtigkeit sein, zu untersuchen, ob die obengenannten Funktionen I_k auch adiabatische Invarianten sind. Im folgenden soll gezeigt werden, daß dieses in der Tat zutrifft. (Spezielle Entartungsfälle verlangen eine besondere Behandlung.)

§ 1. Allgemeines über die adiabatische Beeinflussung eines mechanischen Systems.

Betrachten wir ein mechanisches System von n Freiheitsgraden; die Koordinaten werden bezeichnet mit $q_1 \dots q_n$; die Momente mit $p_1 \dots p_n$; die Hamiltonsche Funktion sei $H(q, p, a)$. Vorläufig wird nur angenommen, daß keine Koordinate oder Moment ins Unendliche wachsen kann, und daß die Koordinaten sich immer zwischen festen Grenzen bewegen.²⁾ (Annahme A).

H ist außer von den q und p von gewissen Parametern a abhängig; z. B. von Massen, elektrischen Ladungen, Stärke eines elektrischen Feldes usw. Eine Variation dieser Größen a wird definiert als adiabatisch-reversible Beeinflussung des Systems, wenn sie folgenden Annahmen genügt:

- (I) Die Variation geschieht unendlich langsam im Vergleich zu den Bewegungen des Systems; näher präzisiert: in einer Zeit, worin jede Koordinate viele Male zwischen ihren Grenzwerten hin und her geht, haben die a um einen unendlich kleinen Betrag der 1. Ordnung zu- oder abgenommen.

1) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51. p. 327. 1916.

2) In den von Epstein und anderen untersuchten Problemen tritt unter den Koordinaten ein azimutaler Winkel φ auf, welcher unbeschränkt wachsen kann. Die Konfiguration des Systems ist aber periodisch in bezug auf diese Variable. Das Anwachsen von φ mit 2π tritt hier an die Stelle des Hin- und Herpendelns der übrigen Koordinaten. Mit einigen geringfügigen Änderungen gilt die ganze Betrachtung auch für Koordinaten dieser Art.

(II) Annäherungsweise ist da/dt konstant.

(III) Während des Prozesses sollen die Gleichungen:

$$(3) \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

ihre Gültigkeit behalten.¹⁾

Geht man von einem bestimmten Bewegungszustand, worin die a und die Integrationskonstanten der Bewegungsgleichungen gewisse Werte besitzen, adiabatisch-reversibel zu einem anderen über, so ändern sich auch die Werte der Integrationskonstanten. Ist $c = f(q, p, a, t)$ ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen, so folgert man aus Annahme (III), daß die totale Änderung von c während des Variationsprozesses beträgt:

$$(4) \quad \delta c = \int \frac{\partial f}{\partial a} \frac{da}{dt} dt = \overline{\frac{\partial f}{\partial a}} \cdot \delta a. ^2)$$

(Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß nur eine von den a variiert wird.) Der Strich über $\partial f / \partial a$ bezeichnet einen in geeigneter Weise bestimmten Mittelwert. Nach Annahme (II) können wir den Zeitmittelwert nehmen, während nach (I) wir uns begnügen können mit dem Zeitmittel für die *unvariierte Bewegung*.

Jetzt wird eine *adiabatische Invariante* definiert als eine Funktion der Integrationskonstanten und der Parameter, deren totale Variation bei der adiabatischen Beeinflussung verschwindet.³⁾

§ 2.

Denken wir uns die Bewegungsgleichungen des mechanischen Systems vollständig integriert. Dann ist es immer möglich, die p auszudrücken als Funktionen der q , der a , und von n (kanonischen) Integrationskonstanten: $a' \dots a^n$.

1) Dieses ist z. B. immer der Fall, wenn nur die a , welche in der Kräftefunktion auftreten, variiert werden. (Intensität des elektrischen Feldes in der Epsteinischen Theorie des Starkeffekts.) — In einem System mit zyklischen Koordinaten können die zykl. Momente als Parameter auftreten; auch die zykl. Geschwindigkeiten, wenn man anstatt von H die Funktion: $R = H - \sum p_{zykl.} \cdot q_{zykl.}$ benutzt.

2) Näheres vgl. in den obengenannten Akad. Abhandlung.

3) Ist ein Integral $c = f$ unabhängig von den a , so ist c eine adiabatische Invariante. Beispiel: Das Flächenmoment in der Zentralbewegung.

Die „bedingt periodischen“ Systeme sind nun charakterisiert durch die Eigenschaft: jedes Moment p_k läßt sich ausdrücken als Funktion nur von q_k , in Verbindung mit den a und a' :

$$(5) \quad p_k = \sqrt{F_k(q_k, a' \dots a^*, a)} .^1)$$

Im Anschluß an Annahme A (§ 1) soll bezüglich der Funktionen F_k angenommen werden:

- a) Jede Gleichung $F_k = 0$ hat (wenigstens) zwei aufeinanderfolgende einfache Wurzeln ξ_k, η_k , zwischen denen F_k positiv ist.²⁾
- b) In einem bestimmten Moment liegt jede Koordinate zwischen den zugehörigen Wurzeln.

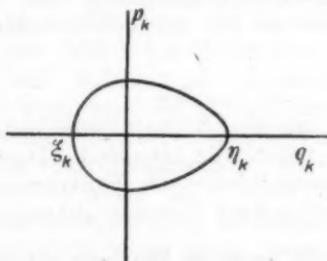
Dann kann bewiesen werden, daß jede q_k eine Librationsbewegung zwischen diesen Wurzeln ausführt.³⁾

Mit den Gleichungen (5) äquivalent ist das System von n ersten Integralen:

$$(6) \quad a^m = H^m(q, p, a).$$

Eine von den a , z. B. a' , ist gleich der Totalenergie; dann ist H^1 die Hamiltonsche Funktion.

1) Geometrische Interpretation dieser Formel: Zeichnen wir für die Koordinate q_k eine $q-p$ -Figur, so beschreibt der Punkt (q, p) hierin



eine geschlossene Kurve, deren Form unabhängig ist von den Werten der anderen q .

2) Das Wurzelzeichen über F_k ist gewählt worden, damit in den häufigsten Fällen die Funktion F_k rational wird. Andernfalls hätte es hier heißen sollen: p_k wird an den Stellen $q_k = \xi_k, q_k = \eta_k$ Null von der Ordnung 1/2. Die Existenz der Librationsbewegung und der unten zu besprechenden Periodizitätseigenschaften des Systems stützen sich eben darauf, daß die Funktion $p_k(q_k)$ Verzweigungspunkte besitzt.

3) Vgl. Charlier, l. c.

Betrachten wir nun die „Phasenintegrale“:

$$(7) \quad I_k = 2 \int_{\xi_k}^{\eta_k} p_k d q_k = 2 \int_{\xi_k}^{\eta_k} d q_k \sqrt{F_k} = I_k (\alpha' \dots \alpha^n a),$$

so findet man nach einer kurzen Rechnung, daß die Änderung von I_k bei einer adiabatischen Beeinflussung des Systems beträgt¹⁾:

$$(8) \quad \delta I_k = \delta a \left[2 \int_{\xi_k}^{\eta_k} d q_k \frac{\partial \sqrt{F_k}}{\partial a} + \sum_m \frac{\partial H^m}{\partial a} \cdot 2 \int_{\xi_k}^{\eta_k} d q_k \frac{\partial \sqrt{F_k}}{\partial \alpha^m} \right].$$

Um zeigen zu können, daß die Größen I_k adiabatische Invarianten sind (also daß $\delta I_k = 0$ ist), bedürfen wir einer Methode zur Berechnung der Mittelwerte $\overline{\partial H^m / \partial a}$. Dazu müssen wir etwas näher eingehen auf die Periodizitätseigenschaften der betrachteten Systeme.

§ 3. Periodizitätseigenschaften der betrachteten Systeme.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial \sqrt{F_k}}{\partial \alpha^i} = f_{ki};$$

die Determinante dieser Funktionen sei F . Es werden die Größen eingeführt:

$$(9) \quad t_i = \sum_k \int_{\xi_k}^{\eta_k} d q_k \cdot f_{ki}.$$

Während der Bewegung des Systems sind $t_2 \dots t_n$ Konstanten; dagegen ist $t_1 = t - t_0$. Alle Phasen unseres Systems sind zu charakterisieren durch die q und p ; oder durch die q und a ; oder durch die t und a . Wir untersuchen nun die Abbildung folgender n -dimensionaler Räume aufeinander (erhalten durch Konstantsetzung der a):

- (I) Des q -Raumes (begrenzt durch die Ebenen: $q_k = \xi_k$; $q_k = \eta_k$);
- (II) des t -Raumes.

1) Da an den Integrationsgrenzen ξ_k, η_k der Integrand $\sqrt{F_k} = 0$ ist, brauchen wir den Variationen der Grenzen keine Rechnung zu tragen. Im Falle eines azimutalen Winkels φ verschwindet die Variation der Grenzen dadurch, daß sie für $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ gleiche Werte hat.

Die t sind mehrwertige Funktionen der q mit den Periodizitätsmoduln ω_{ki} .¹⁾ Hier ist:

$$(10) \quad \omega_{ki} = 2 \int_{\xi_k}^{\eta_k} d q_k \cdot f_{ki}$$

der Zuwachs von t_i , wenn q_k einmal zwischen ξ_k und η_k hin und her geht, während die anderen q konstant bleiben.²⁾ Der t -Raum kann deshalb in *Periodenzellen* unterteilt werden: zu kongruenten Punkten dieser Zellen gehört derselbe Punkt des q -Raumes. Die Abbildung einer Periodenzelle auf den nach (I) begrenzten q -Raum ist eindeutig; jeder Punkt des q -Raumes wird jedoch in mehreren Punkten einer Periodenzelle abgebildet, derart, daß die positiven und negativen Werte von $p_k = \sqrt{F_k}$ auseinander gezogen werden.

Setzen wir noch die Determinante der ω_{ki} gleich Ω , ihre Minoren Ω^{ki} und $\omega^{ki} = \Omega^{ki}/\Omega$. Ω ist gleich dem Volumen einer Periodenzelle.

Die Bewegung des mechanischen Systems wird im t -Raum repräsentiert durch eine gerade parallel zur t_1 -Achse, welche schief durch die Periodenzellen geht. Ersetzen wir jeden Punkt dieser Geraden durch den kongruenten Punkt in einer bestimmten Zelle, so kann gezeigt werden, daß im allgemeinen diese Zelle *dicht* von Punkten erfüllt wird.³⁾ Jetzt behaupten wir, daß der zeitliche Mittelwert einer Größe Z , d. h. der Mittelwert von Z für alle Zustände, repräsentiert durch ein sehr großes Stück der t -Linie, ersetzt werden darf durch den Mittelwert von Z für alle Punkte einer Periodenzelle.⁴⁾ Also:

1) Vgl. Charlier, I. c.

2) Diese Integrale erhalten eine einfache Bedeutung, wenn man q_k als *komplexe* Variable auffaßt. Vgl. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 17. p. 500. 1916.

3) Dieses Theorem röhrt her von Stäckel. Es stützt sich auf Sätze von Jacobi und Kronecker. Vgl. z. B. Kronecker, Werke 3. 1. p. 47. Erforderlich ist, daß zwischen den Größen ω^{ji} (die Schwarzschildischen mittleren Bewegungen) keine Beziehungen existieren von der Form:

$$\sum_j m_j \omega^{ji} = 0,$$

wo die m_j ganze, positive oder negative Zahlen sind.

4) Die Richtigkeit dieser Behauptung kann bewiesen werden mit Hilfe einer Entwicklung der Größe Z in eine mehrfache Fouriersche Reihe, wobei als Argumente nicht die t , sondern die Schwarzschildischen „Winkelvariablen“ auftreten. Vgl. die Akad. Abhandlung.

$$(11) \quad \bar{Z} = \frac{1}{\Omega} \int \dots \int dt_1 \dots dt_n \cdot Z,$$

wo die Integration über das Volumen einer Zelle erstreckt ist. Transformiert auf die q als Integrationsvariablen wird die Formel:

$$(12) \quad \bar{Z} = \frac{1}{\Omega} \int \dots \int dq_1 \dots dq_n \cdot F \cdot Z,$$

da nach (9)

$$\frac{\partial t_k}{\partial q_k} = f_{k1}$$

ist.

Benutzen wir diese Formel zur Berechnung der Größen

$$\overline{\frac{\partial H^m}{\partial a}},$$

so finden wir nach einigen Umformungen:

$$(13) \quad \overline{\frac{\partial H^m}{\partial a}} = - \sum_l \omega^{lm} \cdot 2 \int_{\xi_l}^{\eta_l} dq_l \frac{\partial V \overline{F_l}}{\partial a} \cdot 1)$$

§ 4.

Wenn man den in (13) erhaltenen Wert in die Gleichung (8) einsetzt, zeigt es sich, daß $\delta I_k = 0$ ist. Es sind also wirklich die „Phasenintegrale“ I_k invariant bei einer adiabatischen Beeinflussung des Systems.

Zusammenfassung.

Für mechanische Systeme, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1. Jedes Moment p_k lässt sich ausdrücken als Funktion der zugehörigen Koordinate q_k in Verbindung mit den Integrationskonstanten der n ersten kanonischen Integralen und mit Parametern a ;
2. jede Koordinate hat eine Librationsbewegung;
3. zwischen den mittleren Bewegungen ω^j existieren keine Rationalitätsrelationen;

sind die Phasenintegrale $I_k = \int p_k dq_k$ bei unendlich langsamer Veränderung der Parameter a *adiabatische Invarianten* im Sinne der Definition von Ehrenfest.

1) Näheres vgl. in der Akad. Abhandlung.

Diejenigen Systeme, wo zwischen den mittleren Bewegungen kommensurable Beziehungen von der Form

$$\sum_j m_j^\mu \omega^{j^1} = 0$$

bestehen, erfordern eine besondere Behandlung.¹⁾ Es kann gezeigt werden, daß wenn man sich auf adiabatische Beeinflussungen beschränkt, welche diese Beziehungen unverändert lassen, wenigstens bestimmte lineare ganzzahlige Kombinationen der Phasenintegrale invariant sind. Diese Kombinationen haben die Form:

$$Y_s = \sum_k r_s^k \cdot I_k,$$

wo die Koeffizienten $r_s^1 \dots r_s^n$ ein primitives System ganzzahliger Wurzeln der Gleichungen

$$\sum_j m_j^\mu \cdot r^j = 0$$

sind. Wie Epstein²⁾ gezeigt hat, ist auch die Totalenergie a' des mechanischen Systems, wenn ausgedrückt in den I_k , nur von denselben linearen Kombinationen abhängig.

Leiden, 15. Dezember 1916.

1) Versl. Akad. van Wetensch. Amsterdam, Sitz. v. 30. Dez. 1916.

2) P. Epstein, Ann. d. Phys. 51. p. 180. 1916.

(Eingegangen 20. Dezember 1916.)

Nachschrift bei der Korrektur.

An Hand der Fourierentwicklung der Koordinaten und Momente nach Vielfacheu der „Winkelkoordinaten“ $w_1 \dots w_n$ (vgl. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Berl. Akad. p. 548. 1916) läßt sich zeigen (unter analogen Beschränkungen als in dieser Abhandlung) daß die zu den w_k kanonisch konjugierten Momente adiabatische Invarianten sind. Für diejenigen Systeme, welche Separation der Variablen zulassen, fallen diese Momente mit den I_k zusammen; die Möglichkeit Winkelkoordinaten einzuführen, ist jedoch nicht auf diese Systeme beschränkt. Vgl. Versl. Akad. van Wetensch. Amsterdam, Sitz. v. 27. Jan. 1917.

6. Über die Zustandsgleichung der festen Körper; von Max B. Weinstein.

(Zweite Abhandlung.)

9. Am Schluß meiner ersten Abhandlung¹⁾ habe ich auf die Schwierigkeit hingewiesen, die der Hauptgleichung aller bisherigen Theorien

$$(48) \quad x J c_v = \frac{1}{\gamma} \frac{v}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p$$

aus den Erfahrungen über den thermischen Ausdehnungskoeffizienten der Stoffe erwächst. Grüneisen²⁾ hat gezeigt, daß die Thiesensche Formel, angewendet auf die ganze Ausdehnung bei einer nicht geringen Zahl von Stoffen, selbst wenn die untere Temperaturgrenze bis $\vartheta = 83$ heruntergeht, sich sehr gut der Erfahrung anschließt, ja in tiefen Temperaturen noch besser als in höheren, während nach dieser Formel der Exponent der Temperatur in $\partial v / \partial \vartheta$, statt dem für c_v zu entsprechen, nur ca. $1/10$ von diesem erreicht. Andere Beobachtungen sind der Thiesenschen Gleichung wenigstens formell nicht ungünstig. Ich erwähne die von Valentiner und Wallot³⁾, die sich vor den früheren dadurch auszeichnen, daß die Temperaturintervalle viel enger gefaßt sind, so daß die Zuordnung der Temperaturen zu den $\partial v / \partial \vartheta$ erheblich sicherer ist. Bildet man nach diesen Beobachtungen die $\partial^2 v / \partial \vartheta^2$, so erhält man für die drei Edelmetalle Platin, Iridium, Rhodium⁴⁾ in willkürlicher Einheit, da es auf diese nicht ankommt:

1) M. B. Weinstein, Ann. d. Phys. 51. p. 465. 1916.

2) E. Grüneisen, Über die thermische Ausdehnung der Metalle, Ann. d. Phys. 33. p. 33. 1910.

3) S. Valentiner u. J. Wallot, Bestimmung von Ausdehnungskoeffizienten bei tiefen Temperaturen, Verh. d. D. Phys. Ges. 15. p. 757. 1914.

4) Bei Platin habe ich die 4. und 5., bei Iridium die 2. und 3., bei Rhodium die 1. und 2. Beobachtung zusammengefaßt, aus Gründen, die sich aus dem Anblick der Zahlen selbst ergeben, um auch nur ein wenig auszugleichen.

ϑ	283,6	267,2	247,1	223,6	190,9	139,2	96,2	
$\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}$	66	84	75	70	114	212		
ϑ	283,0	266,5	229,0	209,2	132,3	98,0		
$\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}$	200	53	172	94	230			
ϑ	283,8	266,4	247,1	226,0	207,3	179,4	136,1	961
$\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}$	86	302	57	47	53	263	367	

So außerordentlich unsicher die Zahlenbeträge für $\partial^2 v / \partial \vartheta^2$ und die zugeordneten Temperaturen sind, und so wenig ihr Gang befriedigen kann, das erhellt jedenfalls, daß die Thiesensche Formel ihnen an sich freilich nicht genügen kann; denn aus den Zahlen bis vielleicht $\vartheta = 200$ oder noch tiefer muß man schließen, daß $\partial v / \partial \vartheta \sim \vartheta$ oder $\sim a + b \vartheta$ sein mag. Darauf aber steigt $\partial^2 v / \partial \vartheta^2$ mit fallendem ϑ sehr stark an. Und das kann, wenigstens qualitativ, wohl mit einer Formel nach Art der Thiesenschen vereinigt werden, in der bei $\partial v / \partial \vartheta \sim \vartheta^\epsilon$ das $\epsilon < 1$ ist, in keiner Weise aber mit einer solchen, in der ϵ mit fallender Temperatur gegen 3 konvergieren soll; denn dann müßte wie $\partial v / \partial \vartheta$ auch $\partial^2 v / \partial \vartheta^2$ mit fallender Temperatur ständig fallen und dürfte nicht, mindestens von einer bestimmten Temperatur ab, nach unten steigen. Zu dem gleichen Schluß führt eine Untersuchung der von Ch. L. Lindemann¹⁾ herrührenden Ergebnisse, deren Temperaturgrenze sogar bis $\vartheta = 20$ hinabgeht, für Al, Cu, Zn, Ag, sodann für Glas, Quarz, Bergkristall, Borsäure; stets wächst hier der Gradient von $\partial v / \partial \vartheta$ bis zur tiefsten Temperatur mit fallender Temperatur, und zwar sehr beträchtlich. Ebenso bei den von Grüneisen²⁾ bearbeiteten Ausdehnungskoeffizienten anderer Herkunft für Platin, Palladium, Kupfer, Silber, Eisen, Nickel, und wohl auch Aluminium. Die untere Beobachtungsgrenze stimmt mit der von Valentiner und Wallot gewählten fast überein. Bei Kupfer geht sie jedoch noch weit unter diese hinab bis $\vartheta = 20^\circ$, und es ist bemerkenswert,

1) Ch. L. Lindemann, Physik. Zeitschr. 12. p. 1197. 1911 u. 13. p. 737. 1912.

2) l. c. und Deuxième Conseil de Physique Solvay 1913, Molekulartheorie der festen Körper.

daß das Ansteigen des Gradienten des Ausdehnungskoeffizienten auch hier noch stattfindet; ja der letzte Gradient ist fast fünfmal so groß wie der voraufgehende, bei Borsäure nach Lindemann sogar siebenmal so groß! Von zusammengesetzten Stoffen folgt nach den Bestimmungen von Valentin und Wallot¹⁾ Flußspat dem obigen Ergebnis sicher, Pyrit wahrscheinlich. In einzelnen Fällen scheint der Gradient mit fallender Temperatur erst zu fallen, dann aber steigt er wie angegeben. Das findet vielleicht bei Platin statt. Doch zeigt das nur, daß auch die Thiesensche Formel keinen ausreichenden Ausdruck für den Ausdehnungskoeffizienten bietet, woran auch ohnedies nicht zu zweifeln war nach den Berechnungen Grüneisens²⁾, z. B. für Silber. Eine Ausnahme von dem obigen Ergebnis bietet Blei und Diamant; hier fällt der Gradient des Ausdehnungskoeffizienten stetig mit fallender Temperatur, soweit die Bestimmungen führen.³⁾ Vielleicht hängt das mit der für Platin angegebenen Erscheinung zusammen, so daß die Temperatur, von der ab ein Steigen stattfindet, noch nicht erreicht ist. Doch ist bei Diamant das Debye'sche Grenzgesetz von Röntgen fast genau bestätigt.

Dazu kommt noch folgendes. Die genannten Beobachter finden, daß Silicium ein Dichtemaximum lange vor $\vartheta = 0$, zwischen $\vartheta = 185^\circ$ und 100° hat, und daß $\partial v / \partial \vartheta$ sein Zeichen wechselt. Etwas Ähnliches dürfte bei Zink stattfinden, wo Grüneisen⁴⁾ auf das ganz abnorm große Abfallen der Ausdehnung hingewiesen hat. Ferner findet es statt nach Röntgen auch bei Cuprit, und wie aus früheren Versuchen bekannt ist, bei Smaragd; in diesen Fällen bei $\vartheta = 270$ etwa, und bei Jodsilber bei $\vartheta = 416$. Bei letzterem Stoff tritt eine neue Umkehrung des Zeichens dann ein bei $\vartheta = 218$ etwa. Nimmt man noch hinzu, daß bei Cadmium nach Grüneisen die Ausdehnung mit fallender Temperatur, statt zu sinken, wächst, während in allen diesen Fällen, wo bekannt, die Atomwärme sich normal verhält⁵⁾, so häufen sich die

1) l. c.

2) l. c.

3) Vgl. Ch. L. Lindemann, l. c. und die Abhandlung von Röntgen, Sitzungsber. d. Münch. Akad. p. 381. 1912.

4) l. c.

5) l. c.; vgl. auch die Bestimmungen von Nernst u. Schwers für das ominöse Silicium, Sitzungsber. d. Berliner Akad. p. 368. 1914.

Schwierigkeiten so bedeutend, daß man kaum weiß, wie die jetzt übliche Theorie von ihnen befreit werden soll. Doch muß freilich zugegeben werden, daß der Stand unserer Kenntnisse über die thermische Ausdehnung der Stoffe weit davon entfernt ist, irgend befriedigend zu sein. Was Nernst und seine Schüler für die Atomwärme getan haben, müßte jetzt für die thermische Ausdehnung geschehen, wenn auch die Untersuchungen noch so schwierig sind. Namentlich müßte man auf die Ausdehnung des Volumens selbst zurückgehen, sich nicht mit der Länge begnügen. Vielleicht hilft uns hier die Physikalisch-Technische Reichsanstalt oder die Normaleichungskommission, in deren Arbeitsgebiete ja solche Untersuchungen gerade fallen. Bevor wir hier auf sichererem Boden stehen, ist es schwer, Theorien der festen Körper zu bewerten. Man achte z. B. darauf, daß nach den Rechnungen von Valentiner und Wallot¹⁾ bei Anwendung der Nernst-Lindemannschen *Formel* zur Darstellung von $\partial v/\partial \vartheta$ (freilich ist dabei die Veränderlichkeit der kubischen Kompression von ihnen außer acht gelassen) die Größe β_v in allen Fällen mit sinkender Temperatur abnimmt²⁾, und zwar z. T. sehr erheblich, selbst bis zu mehr als der Hälfte des Ausgangsbetrages. Andererseits scheint der Gradient des Ausdehnungskoeffizienten bei Eisen und Pyrit von ca. $\vartheta = 130^\circ$ aus dem Wachsen mit fallender Temperatur ins Abnehmen überzugehen, so daß nicht ausgeschlossen ist, daß alle Stoffe, wenn die Temperatur nur tief genug herabgeht, doch noch der Erwartung der jetzigen Theorien mehr entsprechen, als nach den nur vorliegenden Erfahrungen zu geschehen scheint. Ganz entsprechen können sie ihnen aber nach Maßgabe dieser Erfahrungen nicht.

10. Wenn man den einfachsten Ansätzen in meiner ersten Abhandlung folgt, so führen sie zu einer Zustandsgleichung

$$(49) \quad (p + E)v = R\vartheta \left[V_1 \left(\frac{1}{\vartheta} + \varphi \right) + V_2 \frac{1}{R\vartheta} E \right].$$

φ ist dabei eine Funktion von ϑ , die, mit ϑ multipliziert, endlich bleibt, und E die Energie, deren Differentialquotienten nach ϑ die Atomwärmen geben, während V_1 , V_2 Funktionen allein

1) l. c.

2) Mit Ausnahme von Silicium, wo der Gang selbst im Bereich der positiven $\partial v/\partial \vartheta$ der umgekehrte ist.

von v sind. Man hat dann die auch aus (26₁) in meiner ersten Abhandlung folgende Formel

$$(50) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p = \frac{R V_1 \frac{\partial (\vartheta \varphi)}{\partial \vartheta} + V_2 \left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta} \right)_p - v \frac{\partial K}{\partial \vartheta}}{p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} - R \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} (1 + \vartheta \varphi) + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)}.$$

Die Temperatur ϑ' , für welche $\partial v / \partial \vartheta = 0$ wird, ist daher bestimmt durch die Beziehung

$$(51) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (R V_1 \varphi \vartheta + V_2 E - v K) \right)_{\vartheta=\vartheta'} = 0,$$

wobei p und v als Konstanten zu behandeln sind. Gewöhnlich wird die Veränderlichkeit von K mit der Temperatur außer acht gelassen. Ist dabei $\vartheta' = 0$, so daß auch $(\partial E / \partial \vartheta)_{\vartheta=0} = 0$ wird, so nimmt man am einfachsten $\varphi \vartheta$ konstant an, also $\varphi \sim 1 / \vartheta$. Man hat dann

$$(49') \quad (p + K)v = R \vartheta \left(\frac{V_1}{\vartheta} + V_2 \frac{E}{R \vartheta} \right) = V_2 E + R V_1$$

bis auf das letzte Glied rechts die bekannte Form, wobei E als Funktion von ϑ und p anzusehen ist, nicht von ϑ und v . Zugleich wird

$$(51') \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p = \frac{V_2 \left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta} \right)_p}{p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} - R \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)},$$

also $\partial v / \partial \vartheta \sim \partial E / \partial \vartheta$ mit freilich variablem Faktor, wie ja auch sonst angenommen wird.

Wird $\partial v / \partial \vartheta$ bei anderer Temperatur Null als bei $\vartheta = 0$, so läßt sich der bezeichnete Ansatz für φ dann gerade nicht machen, wenn $\partial K / \partial \vartheta$ vernachlässigt wird. Behält man aber K als variabel mit ϑ bei, so könnte der Ansatz bleiben, wenn für $\vartheta = \vartheta'$ sein sollte

$$(52_1) \quad V_2 \left(\frac{\partial E}{\partial \vartheta} \right)_p = v \frac{\partial K}{\partial \vartheta}, \quad \vartheta = \vartheta',$$

d. h.

$$(52_2) \quad V_2 J c_p = v \frac{\partial K}{\partial \vartheta}, \quad \vartheta = \vartheta'.$$

Eine solche Beziehung würde Atomwärme und inneren Druck in Verbindung bringen und könnte auch für $\vartheta = 0$ bestehen, falls $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$ sein sollte. Im letzteren Falle wäre dann $(\partial K / \partial \vartheta)_0 = 0$. Vielleicht ist das ein Weg, in das Innere der Zustandsgleichung der festen Körper einzudringen. Aber mehr weiß ich darüber nicht zu sagen.

11. Die hier vertretene Theorie ist, wie schon bemerkt, auch insofern noch günstig gestellt, als sie in den Zusammenhangsgleichungen (22), (23) der ersten Abhandlung zwischen den Atomwärmen und der Ausdehnung noch eine additive Größe c enthält, die nicht Null zu sein braucht. Was die jetzigen Theorien von dem Zusammenhang zwischen $J c_v$ und $\partial v/\partial \vartheta$ feststellen, gilt nach meiner Theorie für $J(c_v - c)$ und $\partial v/\partial \vartheta$. Es können also c_v und $\partial v/\partial \vartheta$ bei verschiedenen Temperaturen Nullwerte erreichen. Ist $\partial v/\partial \vartheta = 0$, so wird $c_v = c$. Bei Silicium und den anderen genannten Stoffen muß schon nach den gegenwärtigen Erfahrungen dieser Fall vorliegen; bei Zink, Flußpat, selbst bei Platin und Rhodium ist er nicht unwahrscheinlich. An Stelle der Gleichung (31') in der ersten Abhandlung, entsprechend der Mie-Grüneisen'schen Theorie, trate

$$(53) \quad \alpha J(c_v - c) = \frac{1}{\gamma} \frac{v}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p, \quad \alpha = -\frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_\vartheta$$

und $(\partial v/\partial \vartheta)_p$ dürfte auch negativ werden. Auch weiß ich keinen Satz (wenigstens in der klassischen) Thermodynamik und Kinetik, der ein Dichtemaximum fester Stoffe bei anderer Temperatur als dem absoluten Nullpunkt unzulässig erscheinen ließe. Der Bau der Stoffe und der Zusammenhang zwischen ihren kleinsten Teilchen ist so außerordentlich verwickelt, daß nichts sich voraussagen läßt; es mögen sogar mehrere Dichtemaxima und Dichteminima vorhanden sein, — Jodsilber ist ja ein Beispiel für ein Maximum und Minimum — davon eines auf den Nullpunkt der Temperatur entfallen kann. Die Erfahrung allein kann entscheiden, und bei einigen Stoffen hat sie ja schon entschieden.

Nun können nach meiner Theorie noch die Größen c und $1/\gamma$ mit der Temperatur variieren. Da $Jc = \varrho - \sigma/\gamma$ ist, wo ϱ und σ Konstanten bedeuten, so hängt alles von der Veränderlichkeit von $1/\gamma$ ab. Mit den Werten von ϱ und σ bei idealen Gasen, die anzunehmen der Sachlage entspricht, hat man, wenn mit \bar{c}_v die Atomwärme solcher Gase bezeichnet wird

$$(54_1) \quad Jc = J\bar{c}_v - \frac{R}{\gamma},$$

somit nach (23) meiner ersten Abhandlung

$$(55_1) \quad Jc_v = J\bar{c}_v - \frac{R}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}{\frac{1}{\gamma} + \frac{\vartheta}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}.$$

Im Dichtemaximum oder Minimum bei $\vartheta = \vartheta'$ wird also

$$(56) \quad J c_v' = J \bar{c}_v - \frac{R}{\gamma'},$$

wo c_v' , γ' den Wert von c_v , γ bei der Temperatur ϑ' dieses Grenzwerts angibt. Ist diese Temperatur Null, so folgt eben die frühere Gleichung (80₂) für

$$\delta_0 = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{k_{\infty} - 1},$$

sonst wäre

$$(57) \quad \frac{1}{\gamma'} = \frac{J(\bar{c}_v - c_v')}{R} = \frac{\bar{c}_v - c_v'}{\bar{c}_p - \bar{c}_v}.$$

Der Wert $1/\gamma = J \bar{c}_v / R$ findet im Gaszustande statt; er sei $1/\tilde{\gamma}$. Dann wird auch

$$(54_2) \quad J c = R \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} - \frac{1}{\gamma} \right),$$

und

$$(55_2) \quad J c_v = R \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}} - \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}{\frac{1}{\gamma} + \frac{\vartheta}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}.$$

Also für $\vartheta = 0$

$$(56_1) \quad \frac{1}{\gamma_0} = \left(\frac{J \bar{c}_v + (p + K) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{R - \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0,$$

oder

$$(56_2) \quad \begin{cases} \frac{1}{\gamma_0} = \left(\frac{\frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{R} (p + K) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{1 - \frac{1}{R} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0 \\ = \frac{1}{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{R} \left(\frac{p + K + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{1 - \frac{1}{R} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0 \end{cases}$$

und nach (54₂)

$$(57_1) \quad J c_0 = - \left(\frac{p + K + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{1 - \frac{1}{R} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0.$$

Mit $K \sim 1/v^2$ und $p_0 = 0$ wird

$$(56') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\gamma_0} &= \frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{1}{R} \left(K \frac{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}}}{1 + \frac{1}{R} K \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_0 = \left(\frac{J \bar{c}_v + K \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{R + K \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0 \\ &= \left(\frac{\frac{1}{\bar{\gamma}} + \frac{K}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{1 + \frac{K}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \right)_0, \end{aligned} \right.$$

$$(57') \quad J c_0 = - \left(K \frac{1 - \frac{1}{\bar{\gamma}}}{1 + \frac{K}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_0.$$

Wollte man, wie es oft geschieht, aber nicht zulässig ist, $K_0 = 0$ ansetzen, so würde folgen, daß zunächst unabhängig davon, ob $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$ ist oder nicht, $1/\gamma_0 = 1/\bar{\gamma}$, $J c_0 = 0$ ist, und dann müßte freilich $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$ sein, wenn nicht

$$\left[p + K + \frac{1}{\bar{\gamma}} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right]_0 = 0$$

ist, was im Bereich der Möglichkeit läge.

Benutzt man die in meiner ersten Abhandlung für ξ gemachten Ansätze, so wird mit $\varphi' = \partial \varphi / \partial \vartheta$, $E' = \partial E / \partial \vartheta$ nach (24) daselbst

$$(58) \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{V_1(-1 + \vartheta^2 \varphi') + V_2 \left(-\frac{E}{R} + \frac{1}{R} \vartheta E' \right)}{v \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} (1 + \vartheta \varphi) + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)} = \frac{-V_1 + V_2 \left(-\frac{E}{R} + \frac{\vartheta E'}{R} \right)}{v \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)},$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} J c &= J \bar{c}_v - R \frac{V_1(-1 + \vartheta^2 \varphi') + V_2 \left(-\frac{E}{R} + \frac{1}{R} \vartheta E' \right)}{v \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} (1 + \vartheta \varphi) + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)} \\ &= J \bar{c}_v - R \frac{-V_1 + V_2 \left(-\frac{E}{R} + \frac{\vartheta E'}{R} \right)}{v \left(\frac{\partial V_1}{\partial v} + \frac{\partial V_2}{\partial v} \frac{E}{R} \right)}, \end{aligned} \right.$$

letzteres in beiden Gleichungen, wenn φ fortgelassen wird, vgl. Nr. 10, und weiter ist

$$(58') \quad \frac{1}{\gamma_0} = - \left(\frac{V_1}{v \frac{\partial V_1}{\partial v}} \right)_0 = - \left(\frac{\partial \log v}{\partial \log V_1} \right)_0,$$

$$(59') \quad J c_v = J \bar{c}_v + R \left(\frac{\partial \log v}{\partial \log V_1} \right)_0.$$

Wir müssen hieraus schließen, daß $\partial V_1 / \partial v$ eine negative Größe ist, V_1 mit wachsendem v also abnimmt. Bei Gasen, wo ξ konstant ist, erscheint $1/\gamma_0$ in der unbestimmten Form 0/0. Ebenso bei festen Körpern, wenn man, wie sonst geschieht, rechts der Zustandsgleichung ein K_0 bei $\vartheta = 0$ ausgleichendes Glied, etwa $R V_1$ [vgl. Gleichung (49')], nicht ansetzt. Für den Fall $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$ würde sich eine Bestimmungsgleichung für V_1 ergeben, wenigstens für die Temperatur $\vartheta = 0$, und damit dann auch für K_0 ; denn man hätte dann

$$(60) \quad \left(\frac{\partial \log V_1}{\partial v} \right)_0 = - \frac{R}{J \bar{c}_v v_0} = \frac{1}{v_0} (1 - k_\infty), \quad k_\infty = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v}.$$

In tiefen Temperaturen wird man also $V_1 \sim v^{1-k_\infty}$ setzen dürfen und $K \sim v^{-k_\infty}$. Bei einatomigen Stoffen wäre das letztere nicht weit entfernt von der bekannten Annahme $K \sim 1/v^2$, was einiges Vertrauen zu der Theorie einflößen kann. In der nächsten Abhandlung werde ich aber zeigen, daß überhaupt der Ansatz $K \sim v^{-k}$ viel wahrscheinlicher ist als der übliche $K \sim v^{-2}$. Vielleicht wird man deshalb geneigt sein, allgemein

$$(61) \quad V_1 \sim v^{-\gamma}$$

zu setzen. Für V_2 nimmt Grüneisen γ selbst an, und zwar als Konstante. Unsere Theorie würde nach (52₂) auch für V_2 einen Hinweis geben, wenn c_p als Funktion von v bekannt wäre, wovon wir nichts wissen.

12. Gehen wir nun auf die Gleichung (58) zurück, die in der Mie-Grüneisenschen Form so viele Schwierigkeiten bot, so braucht sie in unserer Form keinen unmittelbaren Widerspruch gegen diejenigen Erfahrungen zu enthalten, welche $\partial v / \partial \vartheta$ nicht sich wie ϑ^3 der Null nähern lassen, welche überhaupt für $\partial v / \partial \vartheta$ ein anderes Änderungsgesetz mit der Temperatur ergeben, als c_v zugeschrieben wird.

Denn wenn bei den üblichen Annahmen über c_v das c_v sich nicht so ändern sollte, wie $\partial v / \partial \vartheta$, so kann $c_v - c$, da c variabel ist, es tun. Und die Größe $1/\gamma$ stört hier nicht, weil sie nach (56) sich wie eine gebrochene Funktion

$$(a + b F(\vartheta)) / (a' + b' F'(\vartheta)),$$

in der $a, b; a', b'$ von Null verschieden sein müssen, sich ändert. Immerhin bleibt eine gewisse Unsicherheit auch in dieser Theorie zurück, da Jc für tiefe Temperaturen eine so hohe Potenz wie θ^3 in Jc , aufheben müßte, was nach der Definition dieser Größe schwer zu erwarten steht. Voraussagen läßt sich nichts, bis wir über den Gang von α und $\partial v/\partial \theta$ in ganz tiefen Temperaturen hinreichend unterrichtet sind. Wenn man daran denkt, welch starke Wendung der Gang der Atomwärme bei manchen Stoffen fast plötzlich einschlägt, die man aus dem voraufgehenden Gang absolut nicht raten würde — ein kennzeichnendes Beispiel dafür bietet Blei, das noch bei $\theta = 30^\circ$ mehr als zwei Drittel seiner normalen Atomwärme besitzt, und nach den Bestimmungen von Eucken und Schwers¹⁾ nur 15° tiefer kaum noch ein Drittel —, so wird man aus dem Gang z. B. des Kompressionskoeffizienten α bis $\theta = 88^\circ$ nicht auf einen weiteren gleich ruhigen schließen wollen. Es geht offenbar unter den tiefen Temperaturen in den Körpern etwas vor, das wir noch nicht übersehen, wie auch Valen-tiner und Wallot²⁾ auf einiges aufmerksam gemacht haben. Wie wäre auch das ganz absonderliche Verhalten von Diamant hinsichtlich der Atomwärme in tiefen Temperaturen zu verstehen? Nach einigen sollen ja auch Aggregationen der Moleküle stattfinden. Ich selbst würde aus dem Verhalten des Diamants eher auf das Entgegengesetzte schließen, auf Zerlegung der Moleküle in Uratome, freilich ohne vollständige Lösung des Verbandes. Wenn die Bewegungen dieses Verbandes dann genügend gesunken sind, kommen hauptsächlich die Bewegungen der Uratome in Frage, und darf die lebendige Kraft dieser Uratome, jedes von ihnen im Durchschnitt der Zeit, als für die „Temperatur“ entscheidend angesehen werden. Da die Massen dieser Uratome wahrscheinlich sehr gering sind im Verhältnis zu den Massen der Molekel oder der chemischen Atome, werden sie bei der Abkühlung an die umgebenden — nicht aufgelöst gedachten — Molekel oder chemischen Atome durch Stoß nur wenig kinetische Energie abgeben, bei der Erwärmung dagegen von den bei weitem massigeren Molekülen oder chemischen Atomen der Umgebung, schon bei geringem Verlust dieser letztgenannten

1) A. Eucken u. F. Schwers, Verh. d. D. Physik. Ges. 14. p. 578. 1913.

2) l. c.

Verbände, im Verhältnis zu ihrer eigenen lebendigen Kraft stärke Zuwächse solcher lebendigen Kraft erhalten. So könnte man die geringen Wärmegewinne der Umgebung, selbst bei stärkerer Abkühlung der betreffenden Stoffe in ihr, und den geringen Wärmeverlust bei stärkerer Erwärmung dieser Stoffe vielleicht dem Verständnis näher bringen. Die Verbände wirkten freilich noch mit und würden um so mehr in den Vordergrund treten, je höher die Temperatur ansteigt; wir müssen sagen: je schärfer sie ihre Teile zu einem Ganzen zusammenfassen. Aber man kann sich in dem Urwald der Möglichkeiten gründlich verlaufen.

13. Für $\vartheta = 0$ hat man zunächst unter Benutzung der einfacheren Beziehungen (56') und (57')

$$(62) \quad x_0 = \left(\frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{K}{R} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}}{\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) K} \right)_0$$

In den Fällen, wo für $\vartheta = 0$ auch $\partial v / \partial \vartheta = 0$ ist, wird daraus

$$(62') \quad x_0 = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{K_0} = \frac{1}{k_\infty - 2} \frac{1}{K_0},$$

was mit der zweiten Formel unter (44₁') meiner ersten Abhandlung übereinstimmt. Da k_∞ höchstens $5/3$ beträgt, würde hiernach entweder x_0 negativ werden, worauf aber die Bestimmungen Grüneisen's¹⁾ (die freilich nur bis zu Temperaturen von gegen $\vartheta = 80^\circ$ gehen) in keiner Weise hindeuten, oder es müßte K_0 negativ genommen werden, was trotz der vorhandenen Beispiele unter anderen Umständen hier zugestehen wohl Bedenken erregen muß. Also wäre der Ansatz $K \sim 1/v^2$ wenigstens für tiefe Temperaturen aufzugeben. Genauer ist nun für diesen Fall, $\vartheta = 0$, $\partial v / \partial \vartheta = 0$

$$(63) \quad x_0 = \frac{1}{(p_0 + K_0)(1 + \gamma) + v_0 \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_0} = \frac{1}{(p_0 + K_0)k_\infty + v_0 \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_0}$$

und für $p_0 = 0$

$$(63') \quad x_0 = \frac{1}{K_0 k_\infty + v_0 \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)_0}$$

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 33, p. 1239. 1910.

Machen wir nun von dem aus (60) gezogenen Ansatz $K_0 \sim v^{-k_\infty}$ Gebrauch und dehnen ihn auf tiefe Temperaturen aus, so daß in dieser Temperaturen

$$(64) \quad K = \bar{K} v^{-k_\infty}$$

sein würden, mit \bar{K} als Konstante, so käme

$$x_0 = \frac{1}{\bar{K} \times 0} .$$

Das ist ein sehr seltsames Ergebnis und kann nicht zufällig sein. x_0 vermöchte einen endlichen Wert zu haben, wenn man für \bar{K} einen sehr großen Betrag, im Grenzfall einen unendlich großen, zuließe. Im wirklichen Nullpunkt der Temperatur verlieren eben Zustandsgleichungen, und was dazu gehört, ihre Bedeutung. Denn wie dort für alles die Fortsetzung fehlt, so muß auch der Anfang, ohne Atomwärmen, ohne Entropie, ohne Ausdehnung, ohne Druck — wenn auch letztere allgemein entfernt werden — sozusagen aus nichts geschaffen werden. Und in der Natur bieten gerade die Anfänge fast unübersteigliche Schwierigkeiten; ich brauche nur an die Hydrodynamik, die Wärmebewegung u. a. erinnern. Hier werden vielleicht die neuen Anschauungen von Nernst¹⁾, (der übrigens besonders scharf auf Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunktes hingewiesen hat) die so außerordentlich fruchtbar zu sein versprechen, eingreifen können, weil sie die Stoffe auch im absoluten Nullpunkt nicht ohne allgemeine Anregung lassen. Oder die von Einstein und Stern²⁾ auch im absoluten Nullpunkt der Temperatur noch zugelassenen „Agitationen“ der kleinsten Teilchen. Doch enthält die Gleichung (63) im Nenner noch $k_\infty p_0$, dem freilich auch ich theoretisch keine Bedeutung beimessen möchte; denn bei festen Körpern muß theoretisch entscheidend auch das Ergebnis für $p_0 = 0$ sein.

14. Bei weiterer Verfolgung unserer Theorie ändern sich auch die Formeln (34'), (38₁) und (38₂), die ich in meiner ersten Arbeit unter Zugrundelegung von $c = 0$ aus dieser Theorie abgeleitet habe, indem für c_p , c_v immer eintritt $c_p - c$, $c_v - c$. Lassen wir auch noch den Ansatz $K \sim 1/v^2$ fort, so wird zunächst

1) W. Nernst, Verh. d. D. Physik. Ges. 4. p. 83. 1916.

2) A. Einstein u. O. Stern, Ann. d. Phys. 40. p. 551. 1913.

$$(38_a) Jc_p - Jc = \left[p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right] \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p ,$$

die an Stelle der Grüneisen'schen Gleichung (35) daselbst zu treten hätte und (34') ersetze. Die Integration ergäbe für (38₁) und (38₂)

$$(38_{1a}) \frac{v - v_0}{v} = v_0 \int_0^\vartheta \frac{J(c_p - c)}{v^2 \left[p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right]} d\vartheta ,$$

$$(38_{2a}) \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{1}{v_0} \int_0^\vartheta \frac{J(c_p - c)}{p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta}} d\vartheta ,$$

oder für letztere auch

$$(38_{2b}) \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\frac{v_0}{v} \int_0^\vartheta \frac{J(c_p - c)}{v^2 \left[p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right]} d\vartheta}{1 - \frac{v_0}{v} \int_0^\vartheta \frac{J(c_p - c)}{v^2 \left[p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right]} d\vartheta} .$$

Sofern man für

$$v_0^{-1} v^2 \left[p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta} \right]$$

einen mittleren Wert, $\bar{\mu}_0$, ansetzen darf, hat man mehr entsprechend (38₂)

$$(38_{2'b}) \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\frac{J}{v_0} \int_0^\vartheta (c_p - c) d\vartheta}{\bar{\mu}_0 - \frac{J}{v_0} \int_0^\vartheta (c_p - c) d\vartheta} .$$

Nun hat freilich Grüneisen seine in meiner ersten Abhandlung unter (39) angeführte Formel, welche $(v - v_0)/v_0$ bis auf ein Korrektionsglied unmittelbar proportional setzt

$$\int_0^\vartheta J c_v d\vartheta$$

für Kupfer, Platin und Diamant¹⁾ mit der Erfahrung verglichen und gute Übereinstimmung gefunden. Für Diamant mag nach der früher hervorgehobenen Ausnahmestellung die Anwendung der Formel (39) in der Tat begründet sein. Bei Kupfer zeigen die, freilich unerheblichen, übrig bleibenden Fehler einen systematischen Gang, bei Platin wohl auch. Doch hat Grüneisen bei diesen Metallen ja auch die Übereinstimmung des Ganges von $(v - v_0)/v_0$ mit dem der Thiesen-schen Formel, die mit (39) unvereinbar ist, nachgewiesen.²⁾ Es kommt oft genug vor, daß grundsätzlich verschiedene Formeln auf langen Strecken wenig abweichenden Verlauf zeigen, wenn die Konstanten [in beiden Fällen zwei, bei Kupfer für Formel (39) wohl drei] entsprechend gewählt sind. Daß die Beobachtungen von Valentiner und Wallot³⁾ sich einer Formel (39) nicht hinreichend anpassen lassen, ist hervorgehoben.

Für den Kompressionskoeffizienten haben wir entweder nach (58)

$$(65_1) \quad x = \frac{1}{J(c_0 - c)} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{v}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p,$$

oder nach (21) in der ersten Abhandlung

$$(65_2) \quad x = \frac{v}{v_0} \frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{\partial}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}{p + K + \frac{1}{\gamma} \left(p + K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta}}$$

und unter Fortlassung von p

$$(65_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{v}{v_0} \frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{\partial}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p}{K + \frac{1}{\gamma} \left(K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta}} \\ = \frac{v}{v_0} \frac{\frac{1}{\gamma} + \frac{\partial v_0}{v} \alpha}{K + \frac{1}{\gamma} \left(K + v \frac{\partial K}{\partial v} \right) - \vartheta \frac{\partial K}{\partial \vartheta}}, \quad \alpha = \frac{1}{v_0} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p, \end{array} \right.$$

1) Verh. d. D. Physik. Ges. 18, p. 491. 1911; ferner Deuxième Conseil de Physique Solvay, Molekulartheorie der festen Körper, p. 29f.

2) l. o.

3) l. o.

somit

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_0}{x_0} = K_0 \\ \left(\frac{v}{v_0} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\partial v_0}{v} \alpha \right) - \frac{1 + (k_\infty - 1) \frac{K_0}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_0}{k_\infty + \left(\frac{\partial \log K}{\partial \log v} \right)_0} \\ \frac{k_\infty + \left(\frac{\partial \log K}{\partial \log v} \right)_0}{1 + (k_\infty - 1) \frac{K_0}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_0} \end{array} \right.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich an sich nicht von der in der ersten Abhandlung unter (44₂) gegebenen. Sie ist jedoch noch von der Annahme $K \sim 1/v^2$ auch für tiefe Temperaturen frei. Und so ist es möglich, daß die für die Gleichung (44₂) in meiner ersten Abhandlung hervorgehobenen letzten Schwierigkeiten durch Annahmen über K als Funktion von v und ϑ behoben werden können. Aber gegenwärtig ist in dieser Beziehung gar *nichts zu tun*.

Auf meine molekulare Zustandsgleichung unter (II) in der ersten Abhandlung komme ich später zu sprechen. An dieser Stelle bitte ich nur, in der Erklärung auf p. 469, letzte Zeile, hinzufügen zu wollen: $\bar{\Theta}$ das Gesamtvolumen der Molekülen, der Atome oder der Wirkungsgebiete dieser Molekülen und Atome.

(Eingegangen 2. Januar 1917.)

**7. Das Nernstsche Theorem
und die Wärmeausdehnung fester Stoffe;
von Max B. Weinstein.**

Bei Abfassung meiner Aufsätze über die Zustandsgleichung fester Körper¹⁾, habe ich geglaubt, daß, wenn die Erfahrungen über die thermische Ausdehnung dieser Körper so gedeutet werden müssen, daß der Koeffizient nicht allgemein im absoluten Nullpunkt der Temperatur verschwindet, dadurch das Nernstsche Theorem als Grundgesetz gefährdet sei. Ich sehe jetzt, daß es (*nachträglicher Zusatz*²⁾: in der Planckschen Auffassung dieses Theorems) doch einen Ausweg gibt und möchte ihn kurz darlegen. Das Theorem besage, daß im absoluten Nullpunkt alle kondensierten Stoffe gleiche Entropie besitzen, und daß diese Entropie S für einen homogenen solchen Stoff (im Ausdrucke Plancks) sei

$$(1) \qquad S = \int_0^\vartheta \frac{J e_p}{\vartheta} d\vartheta$$

unter konstantem Druck integriert, mit ϑ als Zeichen für die absolute Temperatur, wobei die allgemeine Entropie im Nullpunkt der Temperatur gleich Null gesetzt ist. Nun sei letztere Entropie, als „Integrationskonstante“ zunächst S_0 ; dann bedeutet diese Größe an sich noch keine absolute Konstante, sondern etwas, das noch, bei Wahl von Temperatur und Druck als Veränderlichen, mit dem Druck p sich ändern kann. Wir schreiben hiernach $S_0 = C + P$. Es ist dann C universelle Konstante und P eine Funktion von p , die kein konstantes Glied mehr enthält. Das Nernstsche Theorem nimmt an, daß auch P universelle Bedeutung be-

1) Diese Annalen in den letzten Heften.

2) Hr. Nernst hat mir inzwischen mitgeteilt, daß nach *seiner* Fassung seines Theorems $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$ sein muß. Freilich glaube ich, daß auch seine Fassung noch einen Ausweg offen läßt.

sitzt. Das ist vielleicht nicht nötig, wenn man voraussetzt, daß P vom Druck so abhängt, daß es für $p = 0$ verschwindet. C ist dann die universelle Entropie der kondensierten Stoffe im absoluten Nullpunkt. Nun kommt erfahrungsmäßig der äußere Druck solcher Stoffe, wenn er nicht sehr hohe Beträge erreicht, sehr wenig in Betracht. Er wird darum oft aus den Berechnungen, wo er selbst mitspielt, fortgelassen. Daher wird P ebenfalls keine Bedeutung haben, und man darf $S_0 = C$ und dann $C = 0$ setzen. Wenn man es aber mit Veränderungen zu tun hat, ist dies nicht ohne weiteres zulässig; denn besitzt z. B. P ein Glied $a p$, so bleibt in $\partial P / \partial p$ das a als von p unabhängig und kann einen endlichen Wert haben. Für Veränderungen werden wir hiernach wohl besser schreiben, um nicht zu präjudizieren,

$$(2) \quad S = \int_0^\theta \frac{J c_p}{\vartheta} d\vartheta + P,$$

indem $C = 0$ angenommen ist. Das Nernstsche Theorem erscheint dann freilich wie ein Näherungsgesetz, sofern P nur bei nicht zu hohen Drucken fortgelassen werden darf. Man könnte P noch als für alle kondensierten Stoffe gleich ansehen; aber das empfiehlt sich nicht, wie bald erhellt. Wenn wir jetzt aus der Differentiation nach p nach Plancks Verfahren den Satz über den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten* im absoluten Nullpunkt der Temperatur ableiten, erhalten wir zunächst

$$(3) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_0 = - \frac{\partial P}{\partial p},$$

also die übliche Annahme $(\partial v / \partial \vartheta)_0 = 0$, wenn auch $\partial P / \partial p$ fortgelassen werden darf. Da nun $\partial P / \partial p$, wie bemerkt, ein konstantes Glied enthalten kann, so ist hierüber zu entscheiden nur die Erfahrung in der Lage. Und so kann das Nernstsche Theorem als weitumfassendes Näherungsgesetz bestehen und gleichwohl der Ausdehnungskoeffizient bei $\vartheta = 0$ nicht auch Null zu sein brauchen. Ja, da P für die verschiedenen Stoffe verschiedene Konstanten enthalten kann, wird jener Koeffizient sich bei verschiedenen Stoffen auch verschieden verhalten können. Ich habe in den bezeichneten Arbeiten mehreres darüber gesagt und namentlich auf das Beispiel des Siliciums hingewiesen, dessen Aus-

dehnungskoeffizient nach den Bestimmungen von Valentiner und Wallot¹⁾ zweifellos weit vor $\vartheta = 0$ gleich Null wird und dann in negative Beträge übergeht, nicht Null bleibt, und ein solches Verhalten ist ja, in höheren Temperaturen, bei einigen anderen Stoffen auch bekannt.

Die Größe S_0 wird abhängig sein von den Endzuständen. Nennen wir ihren Betrag, wenn die Integration in (2) mit ϑ' beginnt, S' und bezeichnen die entsprechenden Werte von C und P mit C' und P' , so haben wir

$$(2) \quad S = \int_{\vartheta'}^{\vartheta} \frac{J_{c_p}}{g} d\vartheta + C' + P',$$

und

$$(3) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta'} = - \frac{\partial P'}{\partial p}.$$

Ist $(\partial v / \partial \vartheta)_{\vartheta'} = 0$, so muß $\partial P' / \partial p = 0$ sein, P' also einen Grenzwert erreichen. Wenn dadurch ein Zeichenwechsel in P' bedingt wird, geht $\partial v / \partial \vartheta$ ins Negative über, wie es bei Silicium der Fall ist; sonst könnte $\partial v / \partial \vartheta$ sich zu normalen Werten wenden. Und so ist allem vorgesorgt.

Es ist besser, das Nernstsche Theorem als Näherungsgesetz zu kennzeichnen (wodurch auch erhellt, warum es auf kondensierte Stoffe oder auf Stoffe die sich bei $\vartheta = 0$ wie kondensierte verhalten, da das Theorem auch auf Gase ausgedehnt wird, sich beschränkt), was ja schließlich alle Naturgesetze wohl nur sind, mit Ausnahme vielleicht des Relativitätsgesetzes, wenn es sich bewahrheiten sollte, als es mit einer Voraussage zu belasten, deren Richtigkeit durch die Erfahrung schon jetzt mehr als in Zweifel gesetzt wird.

1) Verh. d. D. Physik. Ges. 15. p. 757. 1914.

(Eingegangen 2. Januar 1917.)

